APPORT DE LA THÉORIE DES CHAMPS CONCEPTUELS À LA DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

hommage à Gérard Vergnaud

Nicolas Balacheff
CNRS - Laboratoire d'Informatique de Grenoble
Univ. Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble INP

Gérard Vergnaud (1933-2021)

La théorie des champs conceptuels

« théorie de la conceptualisation du réel »

Quelle pertinence pour les mathématiques ?

Cet exposé reprend les principaux concepts :

schème, concept et théorème-en-acte

- Il souligne comment la TCC permet l'intégration de l'individu, sujet épistémique et mathématique, dans la TSD
- Il se conclut sur la question de la relation entre concepts et langages à la suite de l'affirmation :

« les mathématiques ne sont pas un langage, mais une connaissance »

La gageure du psychologue…

… qui s'intéresse à l'apprentissage des mathématiques est

- établir des classifications,
- décrire des procédures,
- **formuler des connaissances-en-acte**,
- analyser structure et fonction
  - des énonciations
  - des représentations symboliques

dans des termes qui aient un sens mathématique.

Théorie des champs conceptuels

L'objet de la **théorie des champs conceptuels** est de fournir un cadre aux recherches sur les activités cognitives complexes (esp. scientifiques et techniques)

C'est une **théorie psychologique du concept**, ou mieux encore, de la **conceptualisation du réel**.

Sources empiriques

- **l'action en situation**
- **l'organisation de la conduite**

Un **champ conceptuel est un espace de problèmes** dont le traitement implique des concepts et des procédures de plusieurs types en étroite connexion

Situation

« Ensemble des relations concrètes qui déterminent l'action de l'être humain à un moment donné de son histoire » (sens philo, CNRTL)

les processus cognitifs sont fonction des situations auxquelles ils sont confrontés

« **Une situation didactique est d'abord une mise en scène** intéressante et riche. »

Gérard Vergnaud précise : son organisation suppose la considération à la fois des **fonctions épistémologiques d'un concept**, de la **signification sociale des domaines d'expérience** auxquels il est fait référence, des **jeux de rôle entre les acteurs** de la situation didactique, des **ressorts du jeu**, du **contrat** et de la **transposition**.

Un concept est un ensemble d'invariants utilisables dans l'action

Caractérisation pragmatique d'un concept par

- L'ensemble des **situations qui constituent la référence** de ses propriétés,
- L'ensemble des **schèmes** mis en œuvre dans ces situations

Schème

Une totalité **dynamique fonctionnelle**

1. une **organisation invariante de la conduite** pour **une classe définie de situations** ;
2. nécessairement composée de quatre catégories de composantes ;
   - un **but**, des sous buts et des anticipations ;
   - des **règles d'action**, de prise d'information et de contrôle ;
   - des **invariants opératoires**, (concepts-en-acte, théorèmes-en-acte) ;
   - des **possibilité d'inférences** ;

Ce qui s'adapte : les schèmes – ils s'adaptent à des situations
Ce qui est invariant : l'organisation de l'activité – pas l'activité elle-même

Schème – le dénombrement

Le schème du **dénombrement d'une petite collection** **par un enfant de 5 ans** a beau varier dans ses formes lorsqu'il s'agit de compter des bonbons, des assiettes sur une table, ou les personnes assises de manière éparse dans un jardin, il n'en comporte pas moins **une organisation invariante** :

- coordination des mouvements des yeux et des gestes du doigt et de la main par rapport à la position des objets,
- énoncé coordonné de la suite numérique,
- cardinalisassion de l'ensemble par soulignement tonique ou par répétition du dernier mot-nombre prononcé

un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept... sept!

Deux concepts mathématiques sous-jacents
bijection et cardinal

Invariant opératoire & Connaissance

Si l'on veut prendre correctement la mesure de la fonction adaptative de la connaissance, on doit accorder une place centrale aux formes qu'elle prend dans l'action du sujet.

La connaissance rationnelle est opératoire ou n'est pas

Invariant opératoire désigne les connaissances contenues dans les schèmes

« **concept-en-acte** » et « **théorème-en-acte** »

Il n'y a pas d'action possible sans propositions tenues pour vraies sur le réel.

Un **théorème-en-acte** est une proposition tenue pour vraie

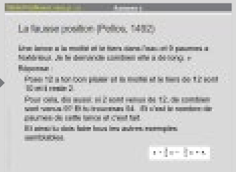
- sa portée est souvent locale
- elle peut rester implicite
- elle peut être fausse

Invariant opératoire

André a joué deux parties de billes et il cherche à reconstituer combien il avait de billes au départ, avant de jouer. Il compte ses billes et trouve 63 billes. Il se souvient qu'il a gagné 16 billes à la première partie et perdu 8 billes à la seconde. Combien avait-il de billes avant de jouer?

- schème 1 : partir de l'état final, ajouter ce qui a été perdu et soustraire ce qui a été gagné.
- schème 2 : faire une hypothèse sur l'état initial, appliquer les transformations successives; comparer le résultat à l'état final donné, corriger l'hypothèse en fonction de l'écart entre les deux.

Annexe 1


La fausse position (Pellos, 1492)

- schème 3 : composer les deux transformations pour savoir si au total, André a gagné ou perdu des billes, et combien. Appliquer à l'état final la transformation réciproque de cette transformation composée.

$$\boxed{F = T(I) \longrightarrow I = T^{-1}(F)}$$

Il n'y a pas d'action sans théorème en acte,

c-à-d : sans proposition tenue pour vraie sur le réel

Concept

Modèle pragmatique : ensemble d'invariants utilisables dans l'action.

l'ensemble **des situations** qui constituent la référence

l'ensemble **des schèmes** mis en œuvre dans ces situations

l'ensemble **des invariants opératoires**

L'usage de signifiants est indispensable à la conceptualisation

On ne débat pas de la vérité d'un énoncé totalement implicite

On n'identifie pas le réel sans l'aide d'énoncés, de symboles, de signes

Modèle sémiotique : $C = (S, I, \mathscr{S})$

S: l'ensemble des situations qui donnent du sens au concept (**la référence**)
I: l'ensemble des invariants socles de l'opérationnalité des schèmes (**le signifié**)
$\mathscr{S}$: l'ensemble des formes langagières et non langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement (**le signifiant**)

Compétence

A est plus compétent que B si...

- il sait faire quelque chose que B ne sait pas faire ....
- il s'y prend de meilleure manière ...
- il dispose d'un répertoire de ressources alternatives ...
- il sait se débrouiller dans une nouvelle situation

Formes stables d'organisation de l'activité

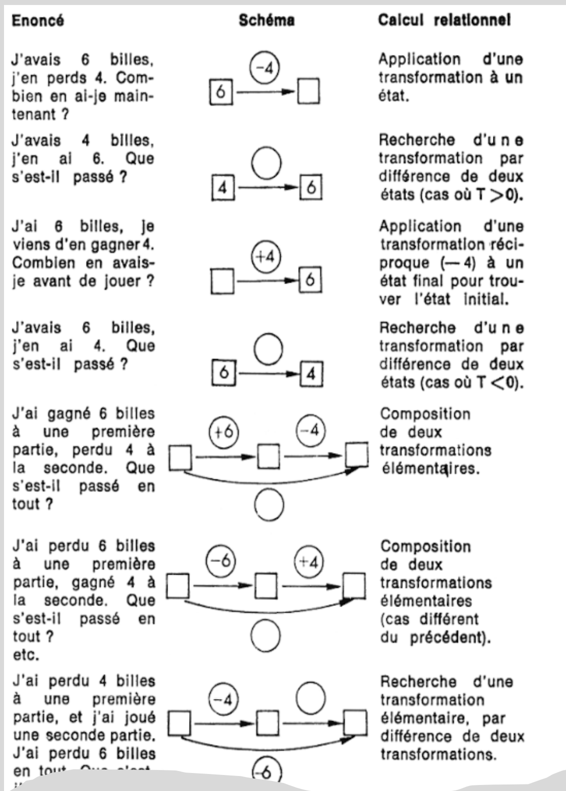
Les schèmes

Variété des situations

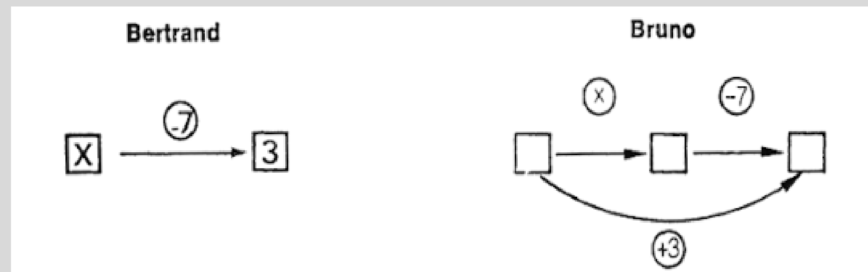
Classification des situations

Structures additives

L'ensemble des situations qui demandent une addition, une soustraction ou une combinaison de telles opérations;



Enoncé	Schéma	Calcul relationnel
J'avais 6 billes, j'en perds 4. Combien en ai-je maintenant ?		Application d'une transformation à un état.
J'avais 4 billes, j'en ai 6. Que s'est-il passé ?		Recherche d'une transformation par différence de deux états (cas où T > 0).
J'ai 6 billes, je viens d'en gagner 4. Combien en avais-je avant de jouer ?		Application d'une transformation réciproque (— 4) à un état final pour trouver l'état initial.
J'avais 6 billes, j'en ai 4. Que s'est-il passé ?		Recherche d'une transformation par différence de deux états (cas où T < 0).
J'ai gagné 6 billes à une première partie, perdu 4 à la seconde. Que s'est-il passé en tout ?		Composition de deux transformations élémentaires.
J'ai perdu 6 billes à une première partie, gagné 4 à la seconde. Que s'est-il passé en tout ? etc.		Composition de deux transformations élémentaires (cas différent du précédent).
J'ai perdu 4 billes à une première partie, et j'ai joué une seconde partie. J'ai perdu 6 billes en tout...		Recherche d'une transformation élémentaire, par différence de deux transformations.



Nombre de réussites

	CP	CE_1	CE_2	CM_1	CM_2
Pierre	14	24	27	27	27
Paul	8	14	24	21	23
Bertrand	4	15	27	25	26
Bruno	1	2	7	8	13
Claude	5	16	24	28	26
Christian	2	13	21	27	28

Les mondes du mathématicien

Étapes du développement des mathématiques

- **Un monde incarné** - réflexion sur les « choses » (matérielles ou mentales), soutenue par le langage
- **Un monde proceptuel** - symboles et processus exprimant des opérations mathématiques abstraites
- **Un monde formel** - des objets définis et exprimés pour créer le formalisme axiomatique

Du travail formel nait un nouveau monde incarné puis de nouveaux concepts, symbolismes …

Contraintes sémiotiques sur le « niveau » de conceptualisation

(& dialectique outil-objet / Douady, 1984).

Conflit sociocognitif

Nous nous intéressons à des individus socialisés potentiellement (décentration) & actuellement (interaction)

Le conflit sociocognitif

- **pas seulement cognitif** car la présence d'une autre personne oblige le sujet à prendre en compte l'existence d'une réponse différente de la sienne
- **pas seulement social** car il ne s'agit pas de négocier les identités et les motivations, mais uniquement la compréhension des aspects conceptuels

Développement vs apprentissage

L'activité individuelle ou collective est encadrée par le système de normes et de représentations lié à la situation

Le sujet dans la TSD

Connaître le sujet cognitif suffit-il à résoudre les problèmes de l'enseignement ?

> « les premiers exemples de situations dans lesquelles le sujet met en œuvre des *connaissances* pour répondre et s'adapter à une sollicitation du milieu me sont venus sans conteste des dispositifs expérimentaux d'épistémologie génétique. […] Mais les auteurs de l'époque ne faisaient aucun effort pour analyser a priori la façon dont ces dispositifs agissaient et pour expliciter ce rapport entre le dispositif, la notion mathématique dont l'acquisition était étudiée […] Or il y avait beaucoup de questions à poser. »

L'objet de la didactique : étudier les conditions que doivent remplir les situations pour favoriser l'apparition, le fonctionnement et le rejet des *conceptions* successives.

La didactique n'est pas réduite à une technologie, sa théorie est celle de **l'organisation des apprentissages**, non celle de l'apprentissage

Le sujet, la nécessité du milieu

Des postulats ;

1. La relation didactique est destinée à être rompue
2. La connaissance scolaire doit être réinvestie dans la « réalité » du monde
3. **La connaissance est spécifique d'une classe de situations**

Le système didactique doit **mettre en scène** un système distinct du système éducatif qui représente « le milieu »

du **milieu non-didactique**
au **milieu adidactique**

> « Concevoir des jeux "fondamentaux" mettant en présence un milieu et un joueur, tels que le savoir apparaîtra comme le moyen de produire des stratégies gagnantes qui ne doivent pas être motivées par des obligations liées au contrat didactique mais par des nécessités de ses relations avec le milieu. »

Cette représentation culturelle et didactique du milieu doit se rapprocher de la « réalité »

Le milieu adidactique est le système antagoniste du système enseigné

La situation didactique doit inclure une représentation des rapports futurs

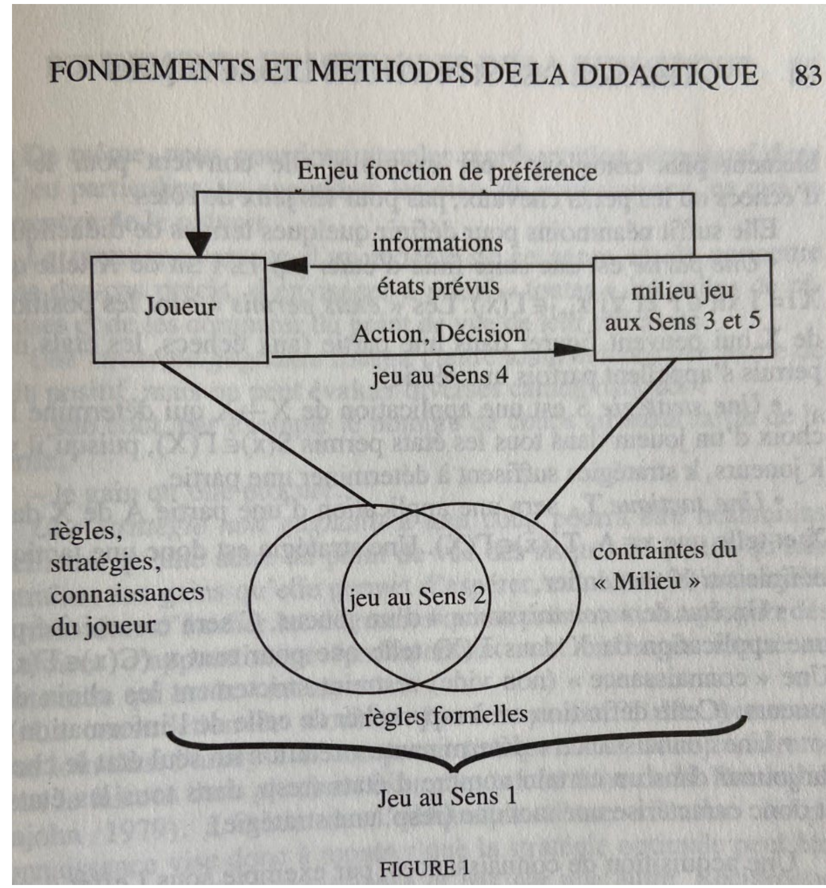
Modèle de la dialectique de l'action, le jeu

Dans une situation d'action, le sujet joue le jeu…

- il a un **but**,
- il prend des **décisions**
- il gagne ou il perd

La suite [dynamique] des "situations d'action" [statique] constitue le processus par lequel l'élève va fabriquer des **stratégies**, c'est-à-dire **« s'**apprendre **»** une méthode de résolution de **son** problème.

Dans une situation d'action, le « milieu » est tout ce qui agit sur l'élève ou ce sur quoi l'élève agit.



« Modèle général de l'action sans interlocuteur »

Situation fondamentale du dénombrement

« Nous avons des peintures dans ces petits pots. Tu dois aller chercher là-bas les pinceaux et en mettre un seul dans chaque pot. Tu dois apporter tous les pinceaux en un seul coup et il faut qu'il ne reste ni pinceau sans pot, ni pot sans pinceau. Si tu te trompes, tu reprends tous les pinceaux, tu les rapportes là-bas et tu essaies à nouveau. »

« Tu dois rester près des pots, et dire ou écrire un message pour que ton camarade, puisse t'apporter les pinceaux que tu veux. S'il te porte trop de pinceaux ou pas assez, vous avez perdu tous les deux. »

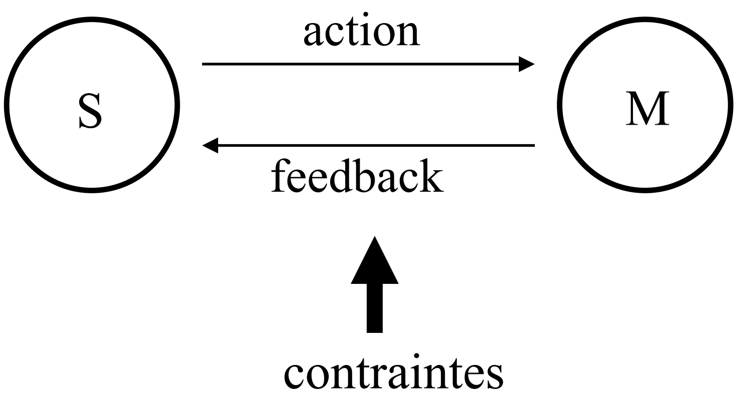
« Pouvons-nous affirmer que l'élève sait compter lorsqu'il est capable de constituer des collections adéquates de n'importe quelle importance dans les conditions de la situation fondamentale ? Pas tout à fait :

> il doit aussi être capable d'être suffisamment sûr de son comptage pour identifier les sources d'erreurs et au besoin les discuter »

Modéliser le système sujet<>milieu

Conception
Connaissance
Concept

- Le sujet épistémique (Piaget)
  Les structures d'actions ou de pensée communes à tous les sujets d'un même niveau de développement, par opposition au «sujet individuel ou psychologique» utilisant ces instruments de connaissance
- Milieu (TSD) = Situation (TCC)
  - « Nous avons appelé "situation" (sous entendu mathématique) un modèle d'interaction d'un sujet avec un certain milieu qui détermine une connaissance donnée comme moyen, pour le sujet, d'atteindre ou de conserver dans ce milieu un état favorable. » (Brousseau 2012 p. 105)



Une conception est l'état d'équilibre dynamique d'une boucle d'action/feedback entre un apprenant et un milieu sous des contraintes proscriptives de viabilité.

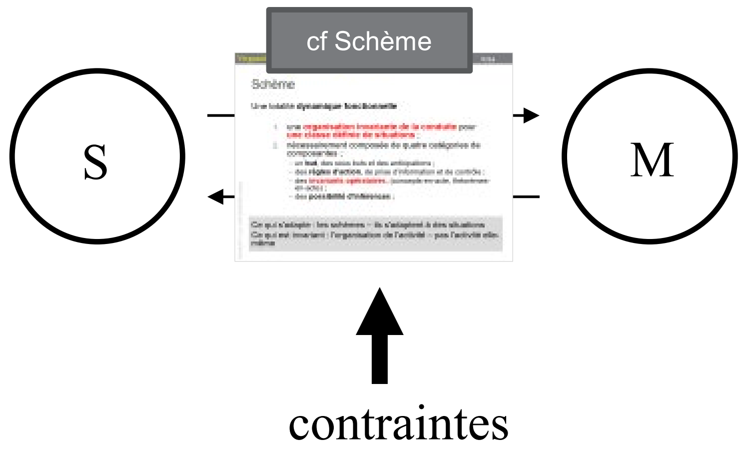
Modéliser le système sujet<>milieu

Conception
Connaissance
Concept

- Le sujet épistémique (Piaget)

  Les structures d'actions ou de pensée communes à tous les sujets d'un même niveau de développement, par opposition au «sujet individuel ou psychologique» utilisant ces instruments de connaissance

- Milieu (TSD) = Situation (TCC)
  - « Nous avons appelé "situation" (sous entendu mathématique) un modèle d'interaction d'un sujet avec un certain milieu qui détermine une connaissance donnée comme moyen, pour le sujet, d'atteindre ou de conserver dans ce milieu un état favorable. » (Brousseau 2012 p. 105)



Conception

P - ensemble de problèmes
R - ensemble d'opérateurs
L - système de représentation
Σ - structure de contrôle

Enfin on ajoute 1 à 1 les doigts au nombre dans la tête

C1 : Comptage- dénombrement IIIII & III

P - Quantifier l'union de deux ensembles, les objets sont physiquement présents, les deux cardinaux sont petits.

R - faire correspondre les doigts ou les objets et les noms des nombres, pointer les objets.

L - langage corporel, comptage

Σ - ne pas compter deux fois la même chose, tout compter, ordre des noms de nombres

C 2 : Sur-comptage 15+8

P - Les nombres sont donnés, mais les collections ne sont pas présentes, l'un des nombres doit être suffisamment petit.

R - choisir le plus grand nombre, compter pour déterminer le résultat.

L - langage corporel, dénomination des nombres, la comptine.

Σ - ordre des noms de nombres, faire correspondre les doigts aux noms de nombres.

C3 : addition écrite 381+97

P - additionner deux entiers

R - algorithme d'addition posée en colonnes

L - représentation décimale des nombres

Σ - vérifier la mise en œuvre de l'algorithme, vérifier la disposition des nombres, des colonnes.

$$\begin{array}{r} 381 \\ 97+ \\ \hline 478 \end{array}$$

1

C4 : Calculatrice

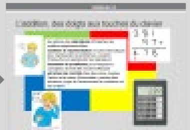
P - additionner deux entiers

R - touches pour écrire un nombre, pour additionner des nombres

L - langage corporel (frappe des touches), représentation des nombres à l'écran

Σ - vérification des frappes, ordre de grandeur.

Annexe 2

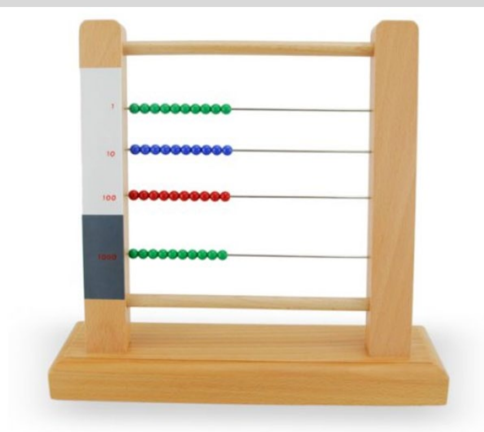


Réflexion sur le concept d’algorithme

Additionner : un problème : calculer la somme de deux nombres
un dispositif : un boulier.

Réflexion sur le concept d’algorithme

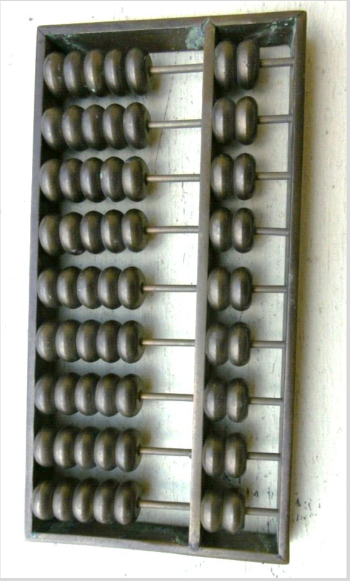
Additionner : un problème : calculer la somme de deux nombres
un dispositif : un boulier.



2 minutes pour penser l’organisation des actions pour calculer la somme de deux nombres sur ce boulier Montessori

Réflexion sur le concept d’algorithme

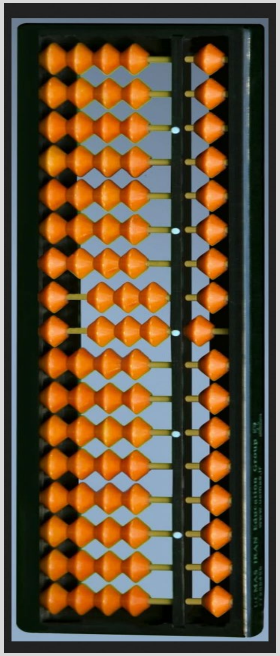
Additionner : un problème : calculer la somme de deux nombres
un dispositif : un boulier.



3 minutes pour (1) penser l’organisation des actions pour calculer la somme sur ce boulier chinois, (2) décrire cette organisation pour le boulier suivant (à découvrir)

Réflexion sur le concept d’algorithme

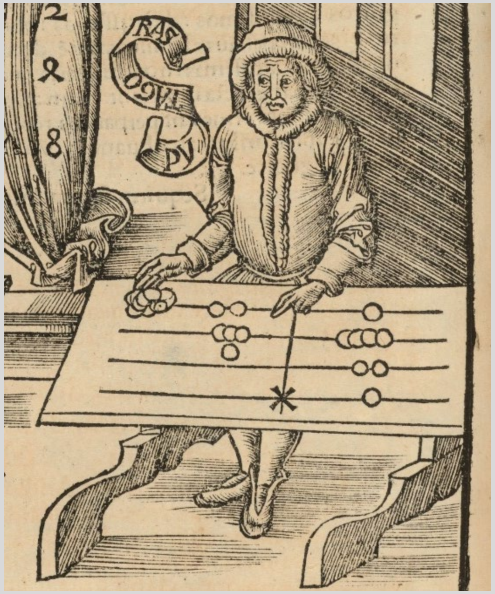
Additionner : un problème : calculer la somme de deux nombres
un dispositif : un boulier.



3 minutes pour un échange sur la construction du *modèle de l’addition* sur un boulier indépendant de *sa technologie*

Réflexion sur le concept d’algorithme

Additionner : un problème : calculer la somme de deux nombres
un dispositif : un boulier.

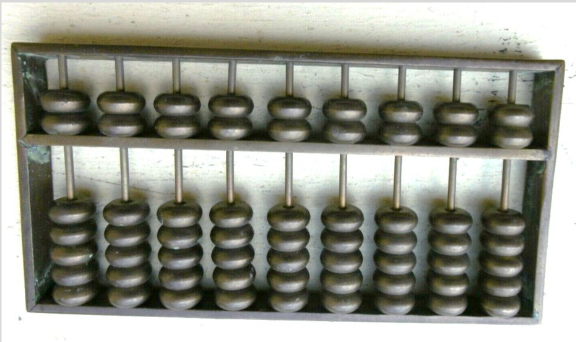


L’arithmétique par les jetons (F. Le Gendre, 1779, pp.497-528) dénomination décimale des nombres, codage romain, système monétaire non décimal, table à compter

Pour aller plus loin : un échange sur la construction du *modèle de l’addition* sur *un boulier* indépendant de *sa « technologie » & du « codage des nombres »*

TV
S A·
ME
TICAE·
BOETIVS
RAS
TAGO
PY

Réflexion sur le concept d'algorithme



Variable

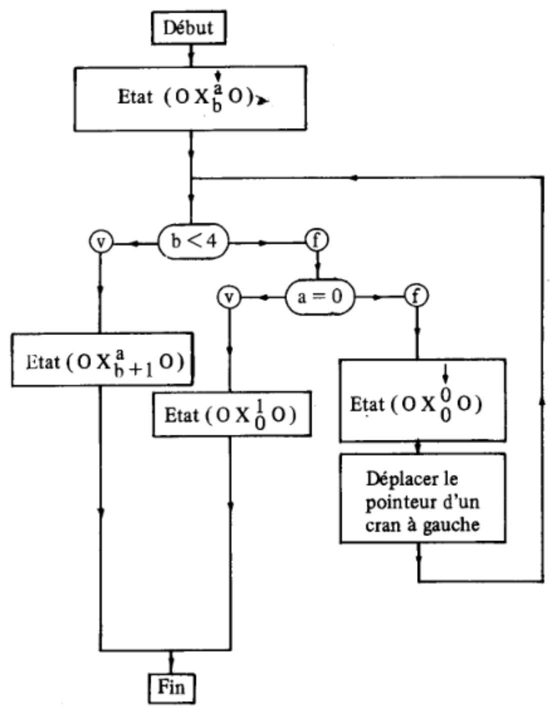
Action

Séquencement

Branchement conditionnel

Boucle

- Invariant
- Initialisation
- sortie



Légende.

Ce schéma s'appelle un organigramme ; on le parcourt en suivant les flèches en entrant par $\boxed{\text{début}}$. Lorsque l'on se trouve sur une boite ⬭ on sort du côté v si l'expression qu'elle contient est vraie, du côté f si l'expression qu'elle contient est fausse. Le cheminement est terminé quand on arrive sur $\boxed{\text{Fin}}$.

Commentaire :

- Le pointeur est fixé sur la broche des unités. Le calcul se déroule en suivant les flèches.
- Si b est inférieur à 4 alors il suffit d'ajouter une boule sur la partie inférieure de la broche. Si b est égal à 4 alors ajouter 1 provoque la création d'un paquet d'ordre supérieur dans la base alternée. Ou encore il faut répercuter une retenue, alors que la partie inférieure de la broche affiche zéro :
- Si a est égal à 0 alors il suffit de lui ajouter 1 ; sinon, c'est-à-dire si a est égal à 1 on provoque à nouveau en ajoutant 1 un paquet d'ordre supérieur ; il faut cette fois répercuter la retenue sur la gauche de la broche sur laquelle nous calculions :
- Nous déplaçons le pointeur sur la gauche, il faut en fait maintenant ajouter 1 au nombre représenté par X sur le boulier.

Remarque : dans la suite du calcul a et b désignent le nombre de boules sur les parties supérieure et inférieure de la broche marquée par le pointeur.

Schème du boulier (version α)

Classe de situations	**Addition sur un boulier**
Calculer N+M	*machine physique & Action*
	représentation des données
Organisation, invariant de conduite	
But	N+M8→S8
Règles d'action	[initialisation M→M8], [parcours de N], [incrément], [gestion du débordement]
Contrôle, inférence	branchement conditionnel, contrôle de boucle, indexation des états, etc.
Invariant opératoire	numération de position, écriture décimale, alternative, boucle, variable

(*) M représentation décimale, M8 représentation sur le boulier

Modèle S<>M (version α)

Domaine de problèmes	Additionner sur un boulier
Opérateurs	Actions sur le boulier, Parcours de l’écriture décimale
Représentations	Tangible sur le boulier, Écriture décimale d’un nombre, Langue naturelle, schémas, symboles
Structure de contrôle	Contrôle de l’itération, conditions de actions sur le boulier, alternative, boucle, variable, écriture décimale, numération de position

« J’ai donc d’abord tenté de déterminer la nature de l’activité mathématique par les situations où ces connaissances s’exercent pour étudier ensuite les conditions dans lesquelles ces situations peuvent être suscitées ou reproduites à des fins didactiques. » (Brousseau, 2012, p. 112)

Réflexion sur le concept d'algorithme

Un problème est un couple (I, Q)
I est un ensemble d'objets
Q est une question posée sur les éléments de I

Un algorithme est **une procédure** de résolution de problème, s'appliquant à une famille d'instances du problème et **produisant, en un nombre fini d'étapes**

- constructives
- effectives
- **non-ambigües**
- organisées

la **réponse au problème** pour toute instance de la famille.

« Nous insistons sur le fait que cette définition est proposée hors de tout système de représentation des algorithmes (ni langage de programmation, ni mots-clés, ni diagrammes, etc). »

Remarque post : ce qui suit discute cette proposition et en propose une évolution

Pensée, langage et action

« les mathématiques ne sont pas un langage, mais une connaissance »

Simon Modeste
Proposer une définition d'algorithme hors de tout système de représentation i.e. ni langage de programmation, ni mots-clés, ni diagrammes, etc.

cf Schème

Gilles Dowek
Un algorithme est une procédure

1. **non-ambigüe**, c'est-à-dire sans liberté d'interprétation pour **celui qui le met en œuvre**,
2. finie, c'est-à-dire dont **la description est finie** et dont toute **exécution** se fait en **un nombre fini d'étapes**

Donald Knuth
« Les algorithmes sont des procédures de *calcul abstraites* pour transformer des informations ; les programmes en sont leurs *incarnations concrètes* »

Gérard Vergnaud
Le langage a d'abord **une fonction de communication**
Cette fonction de communication ne peut s'exercer utilement qu'en s'appuyant sur cette autre fonction du langage qu'est sa **fonction de représentation**.
En relation avec ces deux fonctions, on observe une autre fonction du langage :

aide à la pensée et à l'organisation de l'action.

Pensée, langage et action

Un changement de niveau entre

- La réalisation d'une **occurrence particulière d'une procédure**
- L'élaboration d'une **procédure générique** :
    1. passer d'une connaissance-en-acte à une analyse des objets et des actions en jeu ;
    2. se questionner sur les entrées qui peuvent être pertinentes
    3. se questionner sur la validité de la procédure selon le domaine sur lequel elle va « tourner » ;

l'analyse des **objets** & des **actions** dans

le **dispositif informatique**

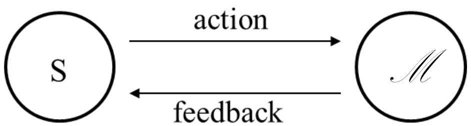
appelle des acquisitions sur le système de

représentation et de traitement des données

Quelle proposition ?

L'action avant le mot

Comment définir un concept [informatique] comme celui [d'algorithme] par une situation qui puisse être comprise par des élèves qui ne savent pas ce qu'est un [algorithme] et qui ne savent pas [programmer] ?
Guy Brousseau



Dispositif informatique

Schème de calcul instrumenté

Champ conceptuel :

Problèmes algorithmiques – {C? : (I1, P1) → (I2, P2), $\mathscr{S}$, $\mathscr{M}$ }

C? calcul qui permet de transformer un ensemble d'informations/données vérifiant une propriété P1 en un ensemble d'informations/données vérifiant P2,

Opérateurs : [affectation], [alternative], [boucle], [récursion], etc.

Représentation ($\mathscr{S}$): **langage de programmation**, langage de spécification

Structure de contrôles : celle de l'**algorithmique** **&** celle du **dispositif (**$\mathscr{M}$ **)**

L'algorithme ?
Une classe d'équivalence de programmes

Remarque post : cette conclusion se proposait d'engager une réflexion pour contribuer au projet d'introduction « débranchée » du concept d'algorithme.

« En dernier ressort, c’est l’action du sujet en situation qui constitue la source et le critère de la conceptualisation »
*Gérard Vergnaud (*1990)

Références

- Balacheff, N. (2013). CK¢, a model to reason on learners' conceptions (M. V. Martinez & A. Castro Superfine, Éds.; p. 2-15). https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00853856
- Balacheff, N., & Margolinas, C. (2005). CK¢ Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. In A. Mercier & C. Margolinas (Éds.), Balises pour la didactique des mathématiques (p. 1-32).
- Balacheff, N., & Neyret, R. (1981). Bouliers et écriture des nombres au CM. Grand N, 25, 39-82.
- Brousseau, G. (1998). Théorie des situations didactiques (Didactique des mathématiques 1970-1990). La Pensée Sauvage.
- Brousseau, G. (2012). Des dispositifs Piagétiens… aux situations didactiques. Éducation et didactique, 6-2, 103-129. https://doi.org/10.4000/educationdidactique.1475
- Douady, R. (1984). Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques—Une réalisation dans tout le cursus primaire. [Paris VII]. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01250665/document
- Durand, C., & Vergnaud, G. (1976). Structures additives et complexité psychogénétique. Revue française de pédagogie, 36(1), 28-43. https://doi.org/10.3406/rfp.1976.1622
- Guillemot, M. (1991). Entre arithmétique et algèbre : Les méthodes de fausse position. Publications mathématiques et informatiques de Rennes, 5, 1-23. http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1990-1991___5_A5_0
- Lagrange, J.-B., & Rogalski, J. (2017). Savoirs, concepts et situations dans les premiers apprentissages en programmation et en algorithmique. Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives, 22, 119-158.
- Le Gendre, F. (1779). L'arithmétique en sa perfection : Mise en pratique selon l'usage des financiers. Chez Laurent Dumesnil. http://archive.org/details/larithmtiqueensa00lege
- Modeste, S. (2013). Enseigner l'algorithme pour quoi ? Quelles nouvelles questions pour les mathématiques ? Quels apports pour l'apprentissage de la preuve? [Thèse mathématique-informatique, Université de Grenoble]. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00783294
- Perret-Clermont, A.-N., Perret, J.-F., & Bell, N. (1991). The social construction of meaning and cognitive activity in elementary school children. In L. B. Resnick, J. M. Levine, & S. D. Teasley (Éds.), Perspectives on socially shared cognition. (p. 41-62). American Psychological Association. https://doi.org/10.1037/10096-002
- Tall, D. (2004). Thinking through three worlds of mathematics. Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4, 281-288.
- Tall, D., Yevdokimov, O., Koichu, B., Whiteley, W., Kondratieva, M., & Cheng, Y.-H. (2012). Cognitive Development of Proof. In G. Hanna & M. de Villiers (Éds.), Proof and Proving in Mathematics Education (Vol. 15, p. 13-49). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_2
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. Recherches en Didactique des Mathématiques, 10(2/3), 133-170.
- Vergnaud, G. (2012). Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance. Investigações em Ensino de Ciências, 17(2), 287-304.
- Vergnaud, G., & Portugais, J. (2001). Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance. Actes du Colloque GDM-2001, 22.

La fausse position (Pellos, 1492)

Une lance a la moitié et le tiers dans l'eau et 9 paumes a l'extérieur. Je te demande combien elle a de long. »

Réponse :

Pose 12 a ton bon plaisir et la moitié et le tiers de 12 sont 10 et il reste 2.

Pour cela, dis aussi: si 2 sont venus de 12, de combien sont venus 9? Et tu trouveras 54. Et c'est le nombre de paumes de cette lance et c'est fait.

Et ainsi tu dois faire tous les autres exemples semblables.

$$x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x = 9.$$

L'addition, des doigts aux touches du clavier

les actions des **opérateurs à l'**interface du système apprenant/milieu ;

système de représentation moyens sémiotiques pour représenter les problèmes, soutenir l'interaction et représenter les opérateurs

ensemble de problèmes pour lesquels la conception fournit des moyens efficaces

structure de contrôle faire des choix, évaluer l'action et le retour d'information, prendre des décisions, juger de l'avancement du problème ou de la tâche