

**La modélisation mathématique et les parcours
d'étude et de recherche :
Formats d'enseignement du PER au niveau
universitaire et son écologie**

Berta Barquero Farràs

Faculté Education. Section de Didactique des Mathématiques.
Université de Barcelone. bbarquero@ub.edu

École Thématique DEMIMES
Autrans, 4 Avril 2022



Structure des contenus

- ① **Domaine de recherche sur la modélisation mathématiques (MoMa)**
- ② **La MoMa dans la théorie anthropologique du didactique**
- ③ **Outils épistémologiques et didactiques depuis la TAD**
- ④ **Les Parcours d'Étude et de Recherche (PER) pour l'enseignement de la MoMa et son écologie**
 - Analyse d'exemples de PER au niveau universitaire
- ⑤ **Conclusions et questions ouvertes**



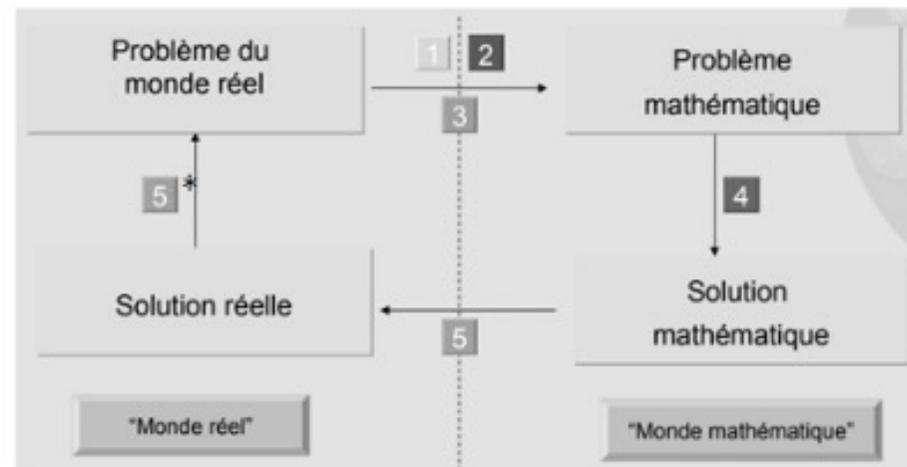
1. Domaine de recherche sur la modélisation mathématique

- Dans les dernières décennies, le champ de recherche connu par « **Applications et modélisation** » a pris de l'ampleur dans la communauté internationale de recherche en didactique et dans les réformes curriculaires.
- Dans la communauté internationale de recherche :
 - Origines qui se situent avec les travaux de Freudenthal (1968) et Pollak (1979), qui ont participé dans le symposium sur « Why to teach mathematics so as to be useful ».
 - Cette origine est suivie par la constitution des **ICTMA Conférences** – *International Conferences on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications* – depuis 1983; et des groupes de travail dans les conférences de didactique des mathématiques: **ICME** — *TSG 22 Mathematical applications and modelling in mathematics education*— et **CERME** — *TWG 6 Applications and Modelling*—.
 - Description de l'évolution du domaine de recherche en éducation mathématique (Kaiser, 1995 et 2014 ; Kaiser et Sriraman, 2006 ; Blum, 2015).



1. Domaine de recherche sur la modélisation mathématique

- Riche interaction transpositive avec des institutions « noosphériques » :
 - **OECD / PISA** : « Mathematical literacy is an individual's capacity to reason mathematically and to formulate, employ, and interpret mathematics to solve problems in a variety of real-world contexts. [...] The **modelling cycle** (formulate, employ, interpret and evaluate) is a central aspect of the PISA conception of **mathematically literate students**; however, it is often not necessary to engage in every stage of the modelling cycle, especially in the context of an assessment (Galbraith, Henn and Niss, 2007). » EDU/PISA/GB (2019, p.7-11)

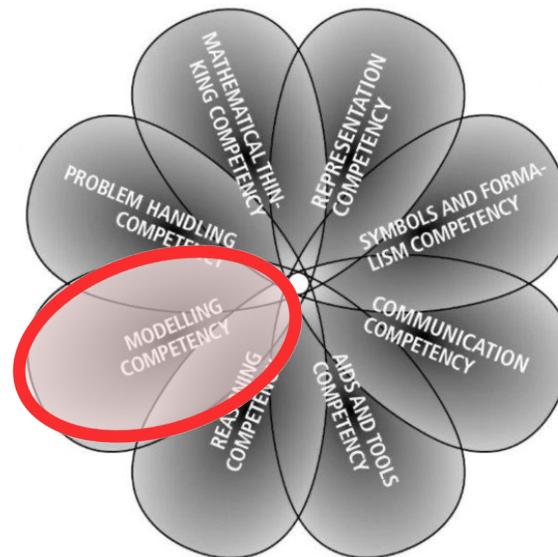




1. Domaine de recherche sur la modélisation mathématique

Réformes curriculaires :

- **Curriculum en Europe** : Inscription de la modélisation dans le langage des compétences (approche proposée dans le projet danois KOM, « KOM flower »)



- **Au niveau universitaire** : Un des principaux inconvénients des organisations de l'enseignement universitaire est la création des difficultés conséquence des déconnexions entre les contenus mathématiques et à leurs inexistantes *raisons d'être* par rapport aux autres disciplines scientifiques (Holton, 2001)



1. Domaine de recherche sur la modélisation mathématique

Au niveau universitaire :

- **Projet de recherche DISUM** (Blum & Leiß, 2007) : DISUM est un projet interdisciplinaire développé à l'Université de Kassel (Leiß, Blum & Messner, 2004). Le focus est étudier comment les étudiants et les enseignants traitent la modélisation.
 1. The *construction* of appropriate modelling tasks.
 2. Detailed cognitive and subject matter *analyses* of these tasks (constructing the “task space”, based on the modelling cycle).
 3. A detailed study and theory-guided description of actual *problem solving processes* of students in laboratory situations (involving pairs of students, sometimes with and sometimes without a teacher).
 4. A detailed study and theory-guided description of actual *diagnoses* and *interventions* from teachers in these laboratory situations.

- **Université danoise de Roskilde** qui s'est engagée à fonder son modèle d'enseignement sur le travail « **problem-oriented project work** » (Blomhøj & Kjeldsen, 2009 ; Niss, 2001 ; Siig Andersen & Heilesen, 2015) → **Programme d'études en les Sciences Naturelles (Nat-Bas)**

The function of the themes is to ensure that the students through their project work acquire insights into, knowledge about, and experiences with different kinds of issues regarding (1) the role of science and mathematics in society, (2) the methods of science; the significance of models, theories, and experiments and their mutual relationships, and (3) science and mathematics as a cultural and social phenomenon.



1. Domaine de recherche sur la modélisation mathématique

Au niveau universitaire :

- **Model-Eliciting Activities for undergraduate students** avec la conception des « Activités d'élicitation de modèles », réalistes pour les étudiants de premier cycle qui les initieront au monde de l'ingénierie au début de leur carrière universitaire » (Carlson, Larsen, & Lesh, 2003; Doerr & English, 2006; Lesh, Cramer, Doerr, Post, & Zawojewski, 2003)

Et d'autres modèles ou dispositifs didactiques que nous allons voir cette semaine...

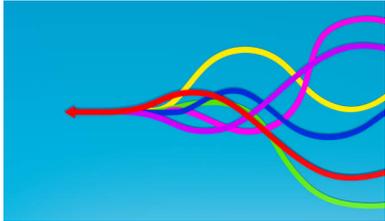
- **Méthode Apprentissage Par Problèmes (APP)**
- « Situation de recherche pour la classe » (SiRC)
- **Parcours d'Étude et de Recherche** au niveau universitaire en Espagne, France, Danemark, ...

TABLE I
PRINCIPLES FOR GUIDING MEA DEVELOPMENT [2, 4]

Principle	Description
Model-Construction	Ensures the activity requires the construction of an explicit description, explanation, or procedure for a mathematically significant situation
Reality	Requires the activity to be posed in a realistic engineering context and to be designed so that the students can interpret the activity meaningfully from their different levels of mathematical ability and general knowledge
Self-Assessment	Ensures that the activity contains criteria the students can identify and use to test and revise their current ways of thinking
Model-Documentation	Ensures that the students are required to create some form of documentation that will reveal explicitly how they are thinking about the problem situation
Construct Share-Ability and Re-Usability	Requires students to produce solutions that are shareable with others and modifiable for other engineering situations
Effective Prototype	Ensures that the model produced will be as simple as possible yet still mathematically significant for engineering purposes



1. Domaine de recherche sur la modélisation mathématique

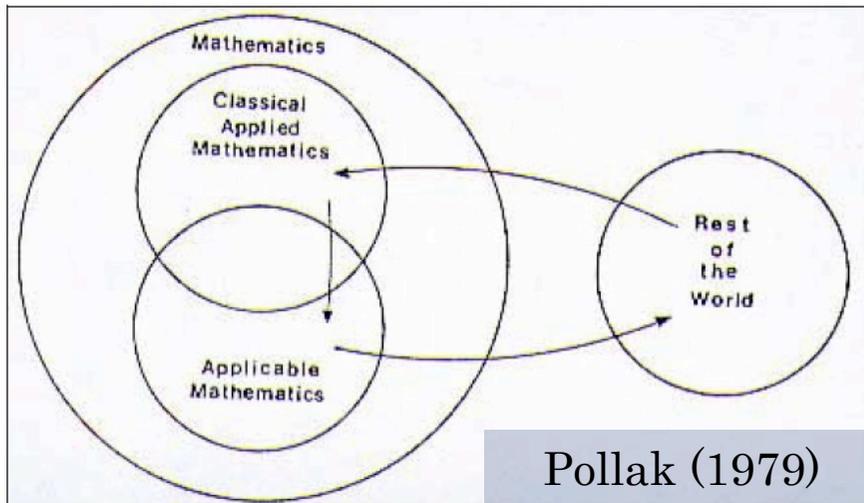


Points de possible divergence dans la recherche sur MoMa

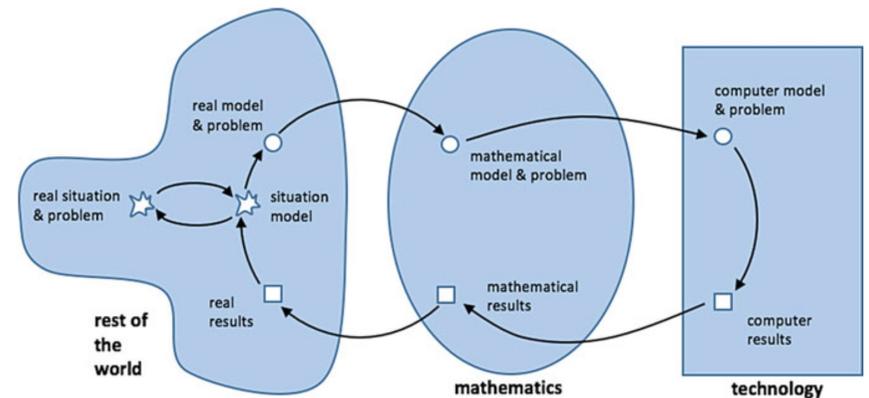
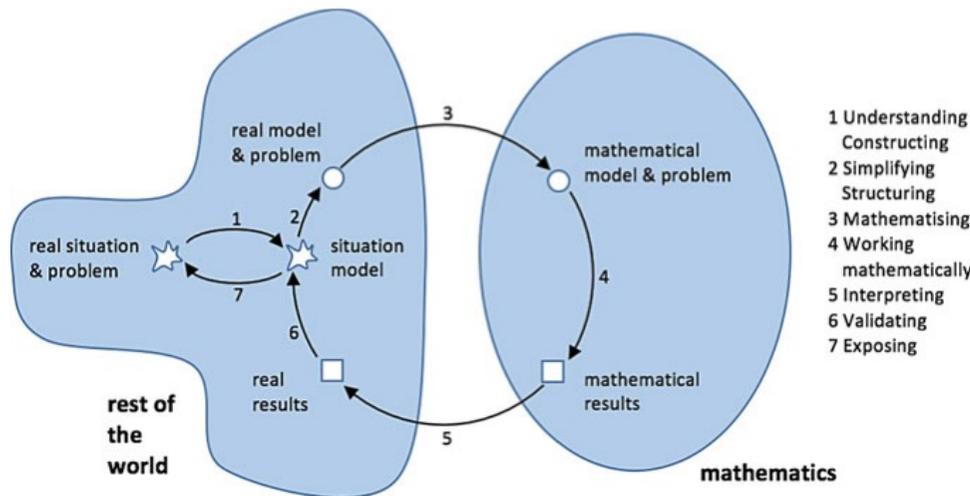
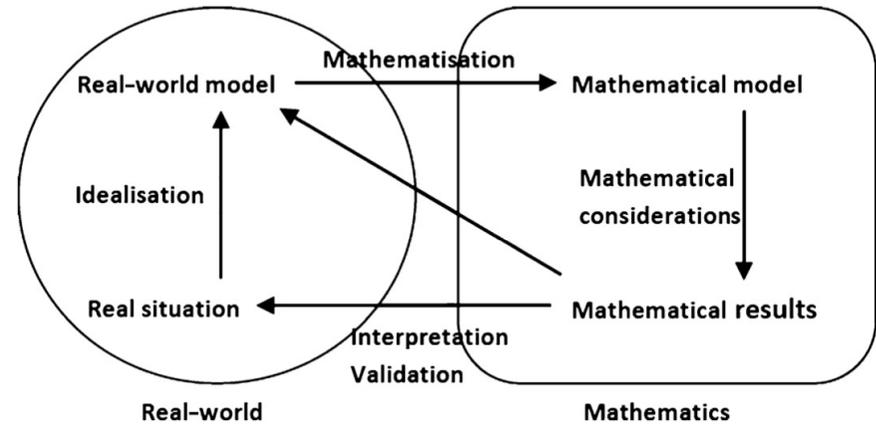
- Diversité des **approches théoriques** avec ses conceptualisations et outils
 - Dominance de l'approche qui se base sur le « cycle de modélisation » et les « compétences de modélisation »
- Variété des **questions de recherche**, qui présupposent une « approche théorique » dans laquelle ils s'énoncent et prennent du sens
- Différente ampleur des **unités d'analyse** considérées : domaine empirique, type d'entités et institutions qui sont prises en compte



1. Domaine de recherche sur la modélisation mathématique



Kaiser-Meißner (1986) and Blum (1996)



Blum & Leiß (2007) and Blum (2011)

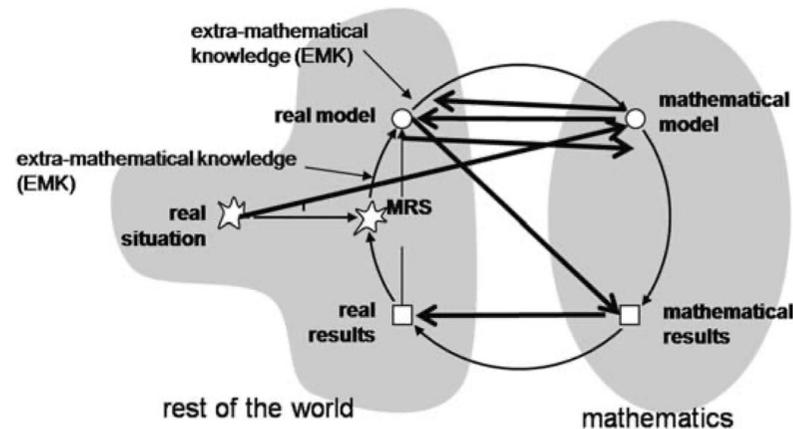
Greefrath (2011)



1. Domaine de recherche sur la modélisation mathématique

Cas 1: Approche du « cycle de modélisation » → Borromeo Ferri (2010)

- Les « cycles de modélisation » semblent particulièrement utiles en tant que modèle épistémologique fondé sur la recherche pour **analyser les processus cognitifs** suivis par les élèves et les enseignants.



Modelling cycle under a cognitive perspective (Borromeo Ferri, 2010, p.104)

If modelling is considered under a cognitive perspective, the focus lies on the individual thinking processes, which are expressed mainly through certain verbal actions during modelling activities [...]. The modelling cycle was chosen because it is sufficiently detailed and thus a suitable instrument for analysing cognitive processes. (Ibid., 2010, pp. 102–113)



1. Domaine de recherche sur la modélisation mathématique

Cas 1: Approche du « cycle de modélisation » → Durandt, Blum et Lindl (2021)

QR : « How do (1a) the modelling competency and (1b) the mathematical competency of first year engineering students as well as (2) the students' attitudes towards mathematical modelling develop through a mathematical modelling unit, taught according to two different styles? » (Durandt et al., 2021, p.7)

- Projet de recherche analogue au projet allemand DISUM, pour les étudiants sud-africains en ingénierie 144 étudiants premier année des études d'ingénierie
- Pré-post test | Unité de modélisation avec 5 leçons qui comprenaient 10 tâches de modélisations une par séance de classe (60 min - 90 min)

The 'Hot-air balloon' Task

From a newspaper: Ian Ashpole, a 43-year-old English base jumper, stood on top of a hot-air balloon. This act in 1500 meter height was the least dangerous part of his performance. More dangerous was the start: Only secured by a rope, Ashpole had to stand on the balloon and to wait until it was filled with hot air. How much air, approximately, was in this balloon? Show your work.



"Giants' Shoes" Task

In a sports centre on the Philippines, Florentino Anovuevo Jr. polishes a pair of shoes. They are, according to the Guinness Book of Records, the world's biggest, with a width of 2.37m and a length of 5.29m.

Approximately how tall would a giant be for these shoes to fit? Explain your answer.



"Nelson Mandela Statue" Task

Can you estimate the real volume of Mandela's upper body (covered by the shirt) by looking at the statue?

Explain your answer.

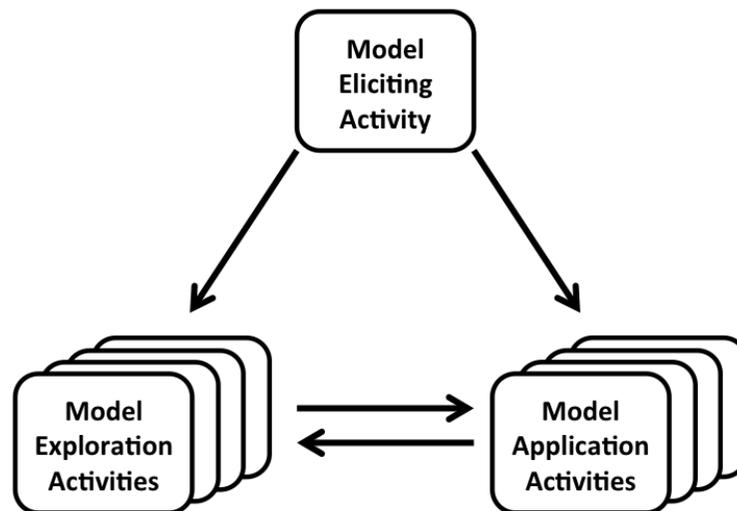




1. Domaine de recherche sur la modélisation mathématique

Cas 2: « Models and modelling perspective »

- Dans la perspective « models and modeling perspective » (MMP), la modélisation mathématique est décrite en termes de « séquences de développement de modèles » impliquant différents types d'activités : **élaboration du modèle**, **exploration du modèle** et **adaptation du modèle** (Lesh et al., 2003).



[...] designing modelling tasks promotes students' engagement with realistic problems, reveals the multiple ways students think about the tasks, and engages students in evaluating the usefulness of their solutions. (Doerr et English, 2006)

Représentation des MMP activités (Lesh et al., 2003; Doerr & English, 2003)

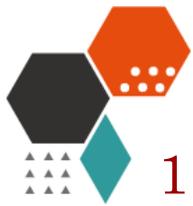


1. Domaine de recherche sur la modélisation mathématique

Cas 2: « Models and modelling perspective »

- La modélisation est conçue comme une activité continue comprenant **une chaîne de modèles, de séquences de modèles, sa construction et son raffinement.**
- Les activités de modélisation sont pensées dans la mesure où elles permettent à élèves et enseignants de progresser dans une séquence de modèles : « susciter », « explorer », « appliquer » (et « développer »).
- Certains travaux parlent du besoin d'élaborer des descriptions alternatives des savoir scolaires:

QR: Can research related to **functions and co-variation** inform the design and use of model-eliciting activities? What effect does the use of model eliciting activities have on the development of undergraduate students' **covariational reasoning abilities**? How can the models and modeling perspective inform the refinement of the **Co-variation Framework**? (Carlson et al., 2003, pp. 466–467)



1. Domaine de recherche sur la modélisation mathématique

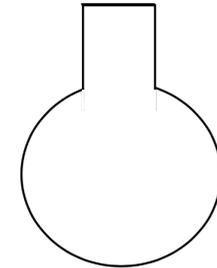
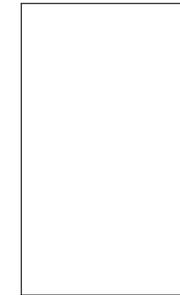
Cas 2: « Models and modelling perspective »

Bottle Model-Eliciting Activity

Dear Math Consultants,

Dynamic Animations has just been commissioned to animate a scene in which a variety of bottles will be filled with fluid on screen. We need your help to make sure this scene appears realistic.

We need a graph that shows the height of the fluid given the amount of fluid in the bottle (a height/volume graph). Below, we have provided a drawing of one of the bottles used in the scene. Please provide a graph for this bottle and a manual that tells us how to make our own graph for any bottle that may appear in this scene.



Version de l'activité propose dans la phase de model eliciting (Carlson et al., 2003, pp. 471)

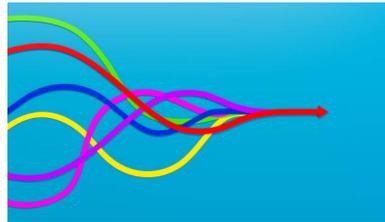
Covariation Framework

Categories of Mental Actions (MA)

- MA1)* An image of two variables changing simultaneously;
- MA2)* A loosely coordinated image of how the variables are changing with respect to each other (e.g., increasing, decreasing);
- MA3)* An image of an amount of change of the output variable while considering changes in fixed amounts of the function's domain;
- MA4)* An image of rate/slope for contiguous intervals of the function's domain;
- MA5)* An image of continuously changing rate over the entire domain;
- MA6)* An image of increasing and decreasing rate over the entire domain.

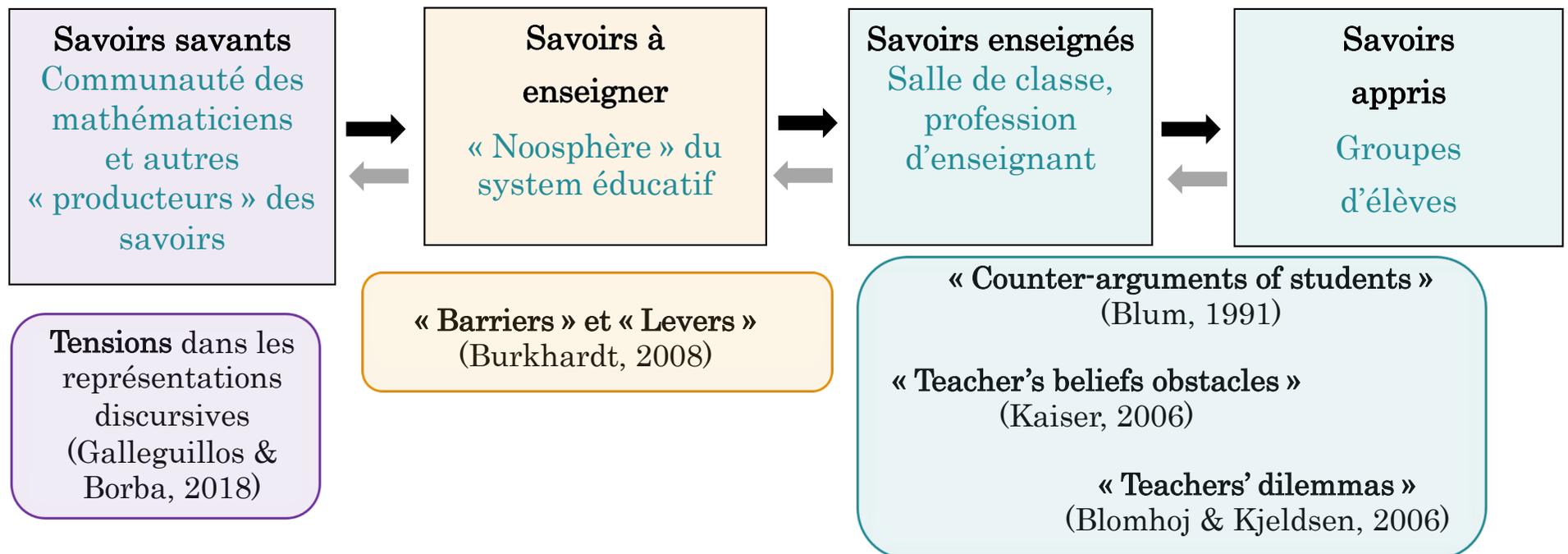


1. Domaine de recherche sur la modélisation mathématique



Points de possible rencontre

- Des recherches sur l'enseignement et l'apprentissage de la modélisation mathématique mettent en évidence l'existence de **fortes contraintes** institutionnelles sur la **diffusion généralisée** et à long terme





2. La MoMa dans la théorie anthropologique du didactique

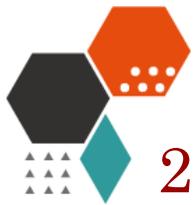
- Aborder des problèmes de recherche sur la MoMa dans la TAD implique de reformuler les **processus de modélisation** afin de les interpréter dans le cadre d'un **modèle général de la construction et de la diffusion institutionnelles** des savoirs mathématiques (et autres).

- Un modèle général des **activités humaines** en termes de **praxéologies** \rightarrow *praxis* (types de tâches et techniques) et *logos* (technologies et théories)

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= [T / \tau] \oplus [\theta / \Theta] \\ &= [T / \tau / \theta / \Theta] \end{aligned}$$

- Un modèle pour la dynamique de l'étude et de la recherche de questions problématiques en termes du **système didactique**, du **schéma herbartien** et ses **dialectiques** (questions-réponses; médias-milieu; individu-institution; etc.)

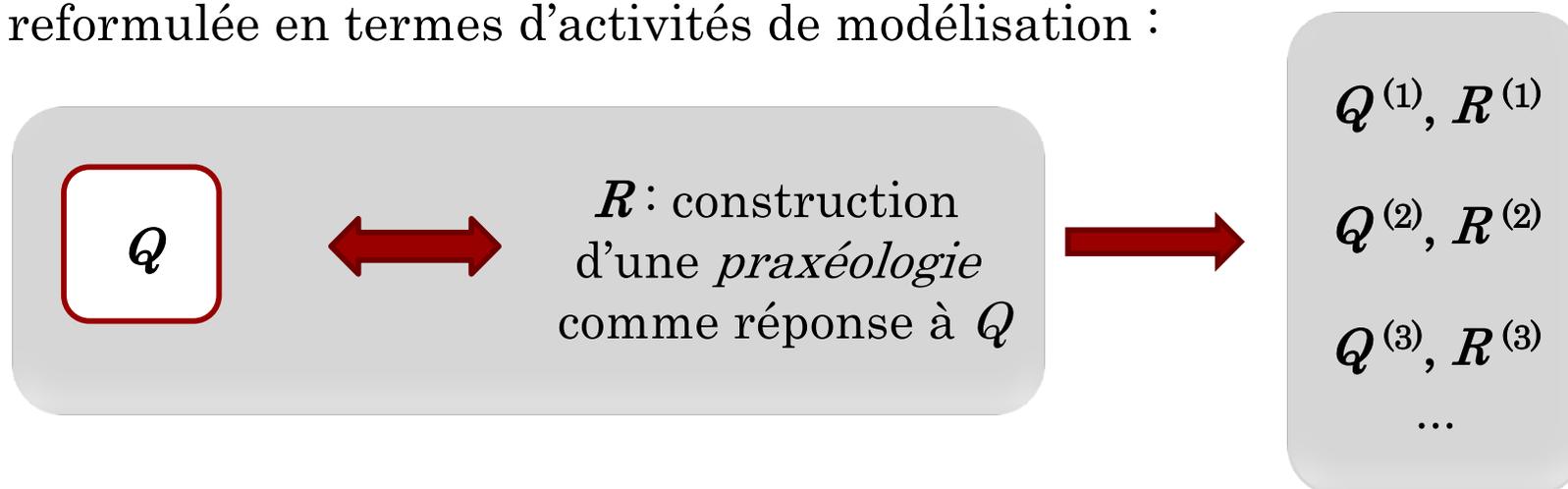
$$S(X; Y; \heartsuit) \mapsto A^\heartsuit$$



2. La MoMa dans la théorie anthropologique du didactique

Un aspect essentiel de l'activité mathématique porte sur la construction d'un modèle (mathématique) de la réalité que nous voulons étudier, sur le travail avec ce modèle et sur l'interprétation des résultats obtenus dans ce travail pour répondre aux questions posées initialement. Une grande partie de l'activité mathématique peut s'identifier, par conséquent, avec une activité de modélisation mathématique. Chevallard, Bosch, et Gascón (1997)

- Dans la TAD, une grande partie de l'activité mathématique peut être reformulée en termes d'activités de modélisation :





2. La MoMa dans la théorie anthropologique du didactique

- Les deux principaux éléments sont les notions de « **système** » et de « **modèle** » qui représentent davantage une fonction qu'une entité.

1. On définit le système que l'on entend étudier, en en précisant les « aspects » pertinents par rapport à l'étude que l'on veut faire de ce système, soit l'ensemble des **variables** par lesquelles on le découpe dans le domaine de réalité où il nous apparaît. Nous désignerons ces variables par les lettres x, y, z, a, b, c , etc., nous réservant de revenir sur la question - majeure - que soulève cet usage un peu plus loin.

2. On construit alors le modèle à proprement parler en établissant un certain nombre de relations, $\mathbb{R}, \mathbb{R}', \mathbb{R}''$, etc., entre les variables prises en compte dans la première étape, le modèle du système à étudier étant **l'ensemble de ces relations**.

3. On « travaille » le modèle ainsi obtenu, dans le but de produire des **connaissances** relatives au système étudié, connaissances qui prennent la forme de nouvelles relations entre les variables du système.

Chevallard (1989, p. 53)



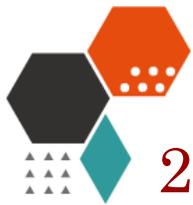
2. La MoMa dans la théorie anthropologique du didactique

■ La nature des systèmes

- Un système mathématiquement modélisable est considéré comme un domaine de la réalité, sans aucune restriction, qui puisse être isolé du reste – même si ce n'est que de manière hypothétique. La notion de système inclut les systèmes (intra)mathématiques.

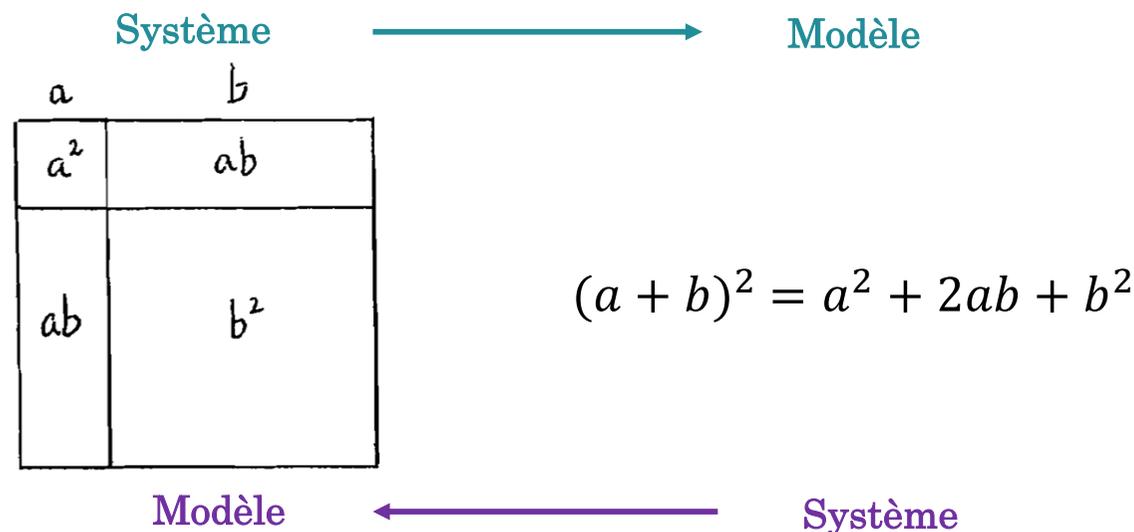
■ La fonction des modèles

- L'intérêt ou la fécondité d'un modèle réside dans sa capacité à **produire des connaissances sur le système modélisé** qu'une autre voie ne nous donnerait pas aussi facilement.
- La problématique de **l'adaptation du modèle au système** est une tâche qui doit être au cœur de l'activité de modélisation.



2. La MoMa dans la théorie anthropologique du didactique

- **Réversibilité de la relation de modélisation** : Le rapport du système au modèle peut en effet s'inverser. Le système peut apparaître comme un modèle de son modèle.



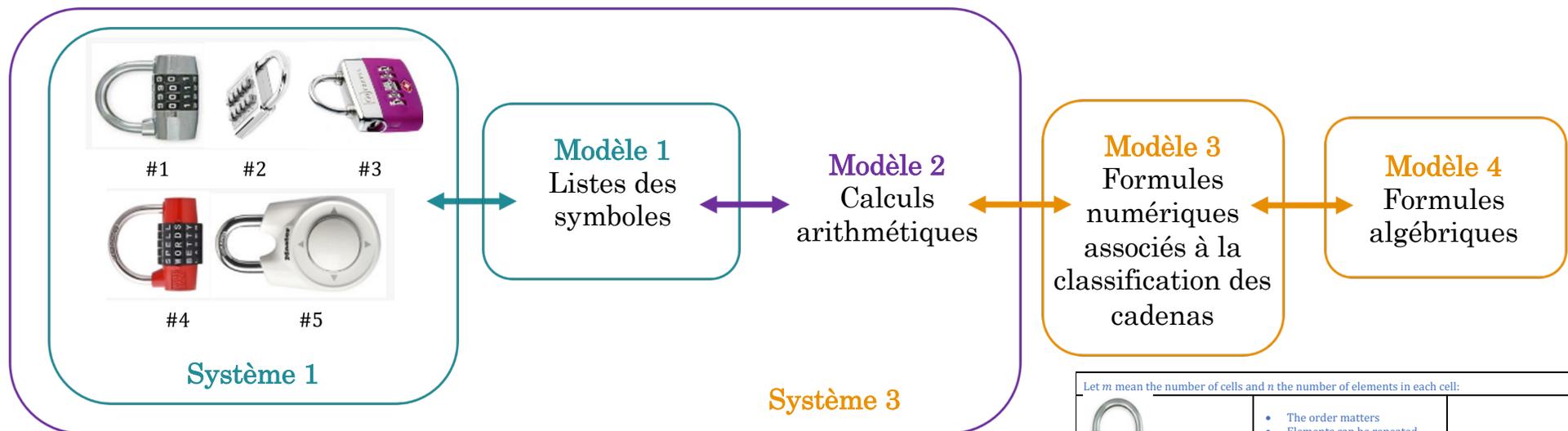
- **Récurrence du processus de modélisation** : Le « travail sur le modèle » peut comporter la construction de modèles successifs, mieux adaptés à l'étude.



2. La MoMa dans la théorie anthropologique du didactique

Exemplifié dans le cas « La combinatoire dans une perspective MoMa » (Vásquez, 2019/21)

Q₀: Quel cadenas est le plus sûr ?



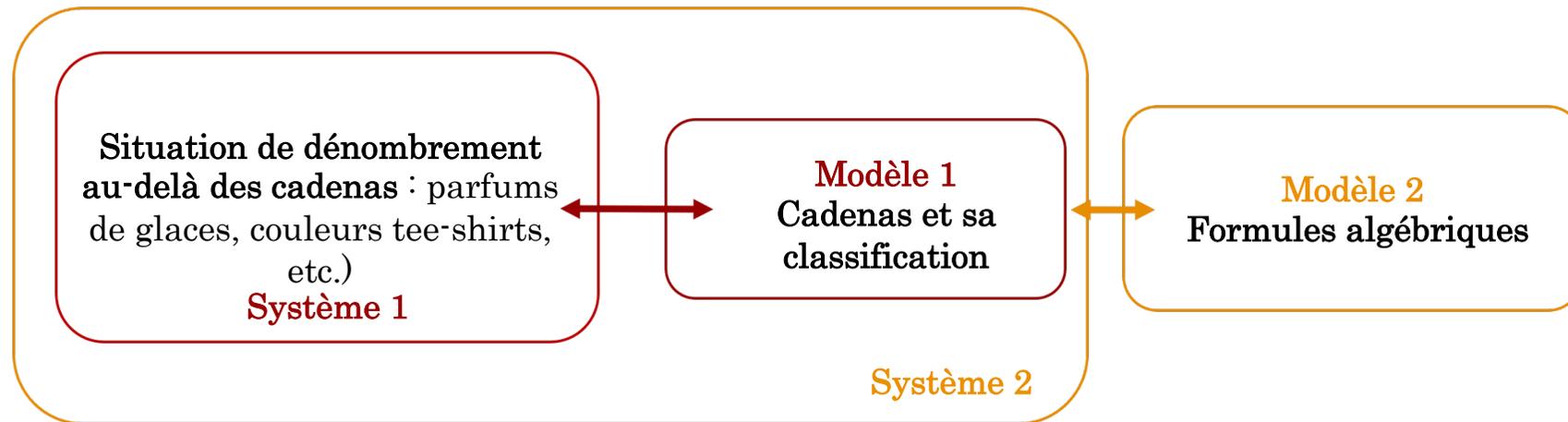
Let m mean the number of cells and n the number of elements in each cell:		
<p>All combinations allowed</p>	<ul style="list-style-type: none"> The order matters Elements can be repeated Variation with repetition: $VR_{n,m} = n^m$	$VR_{10,4} = 10^4$
<p>Only combinations without repeated elements</p>	<ul style="list-style-type: none"> The order matters Elements cannot be repeated Variation without repetition: $V_{n,m} = \frac{n!}{(n-m)!}$	$V_{10,4} = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!}$ $= 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$
<p>Only combinations without repeated elements and $n = m$</p>	<ul style="list-style-type: none"> Same case than before but with $n = m$ Permutation: $P_n = n!$	$P_4 = 4!$
<p>Combinations pressing 3 of 10 numerical keys</p>	<ul style="list-style-type: none"> The order does not matter Elements cannot be repeated Combination: $C_{n,m} = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$	$C_{10,3} = \frac{10!}{3!(10-3)!}$ $= \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{2 \cdot 3}$



2. La MoMa dans la théorie anthropologique du didactique

Exemplifié dans le cas « La combinatoire dans une perspective MoMa » (Vásquez, 2019/21)

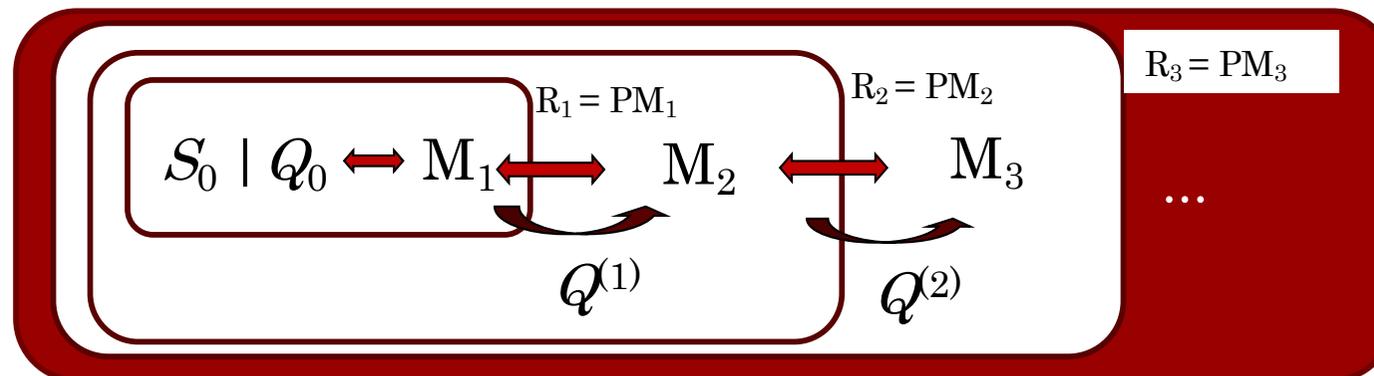
$Q_{0_general}$: Combien de combinaisons peut-on générer dans différentes situations de comptage ?





2. La MoMa dans la théorie anthropologique du didactique

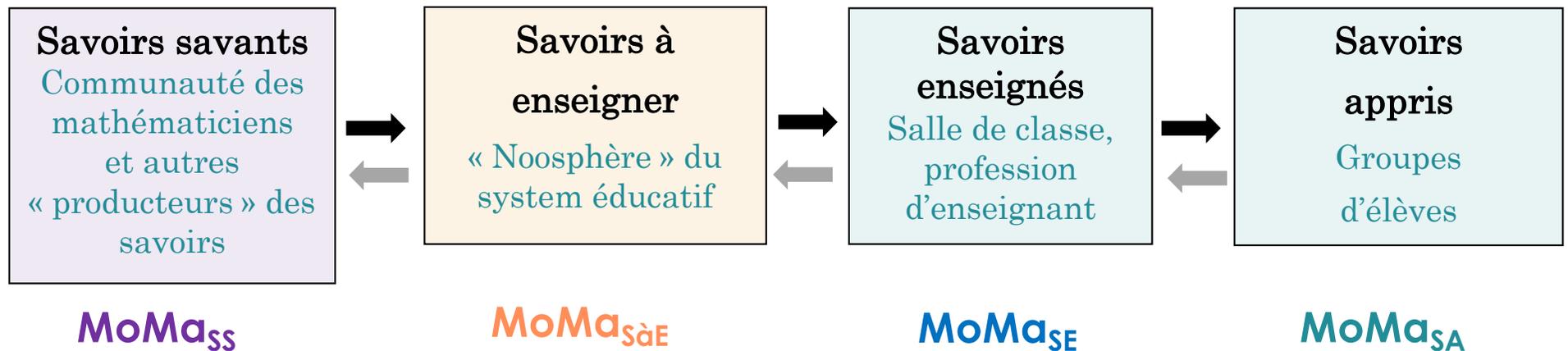
- Dans la TAD, on a proposé de reformuler l'activité de modélisation comme un processus de construction et articulation de **praxéologies mathématiques de complexité et complétude croissantes** afin des répondre à certaines questions problématiques qui ont été soulevées dans un domaine des mathématiques ou de la réalité extra-mathématique (García, 2005 et Barquero, 2009).





2. La MoMa dans la théorie anthropologique du didactique

- La transposition didactique (Chevallard, 1985) au cœur de l'étude des phénomènes de création, transformation et diffusion des savoirs

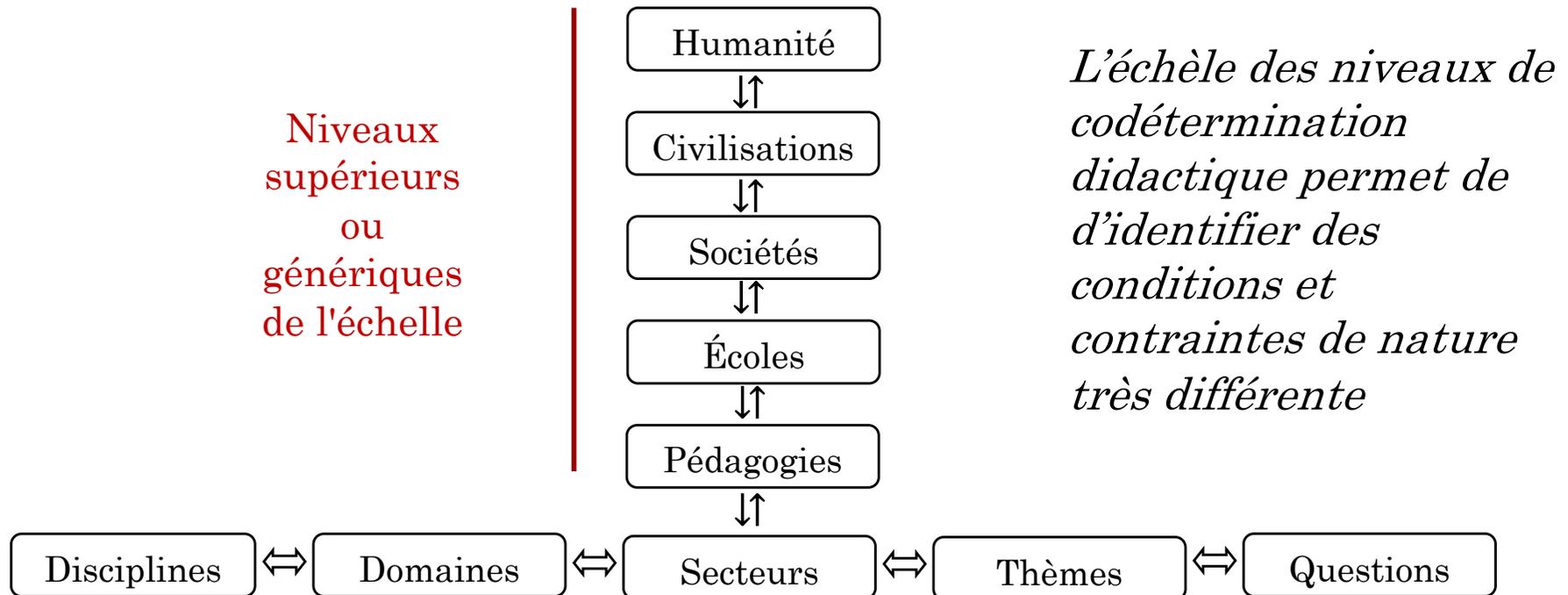


Le fait de se donner une définition propre de la MoMa (toujours en évolution), permet de repérer, décrire et analyser les différentes conceptions (ou modèles dominants) de la MoMa dans les différentes institutions qui interviennent dans les processus de transposition didactique



3. Outils épistémologiques et didactiques depuis la TAD

Niveaux de codétermination didactique (Chevallard, 2002)

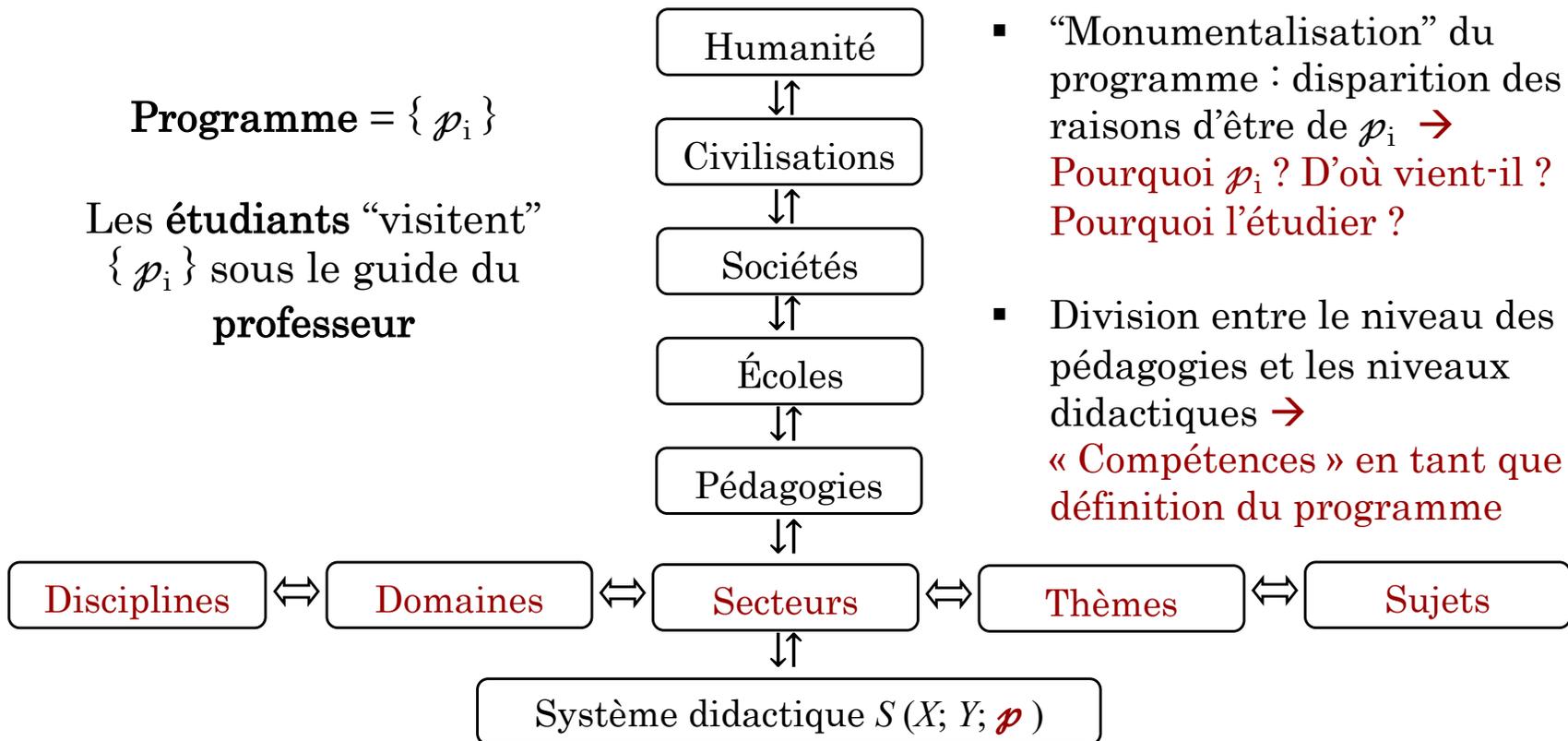


Niveaux spécifiques de la discipline



3. Outils épistémologiques et didactiques depuis la TAD

Et dans le **paradigme de la visite des œuvres** ? (Chevallard, 2006, 2015)





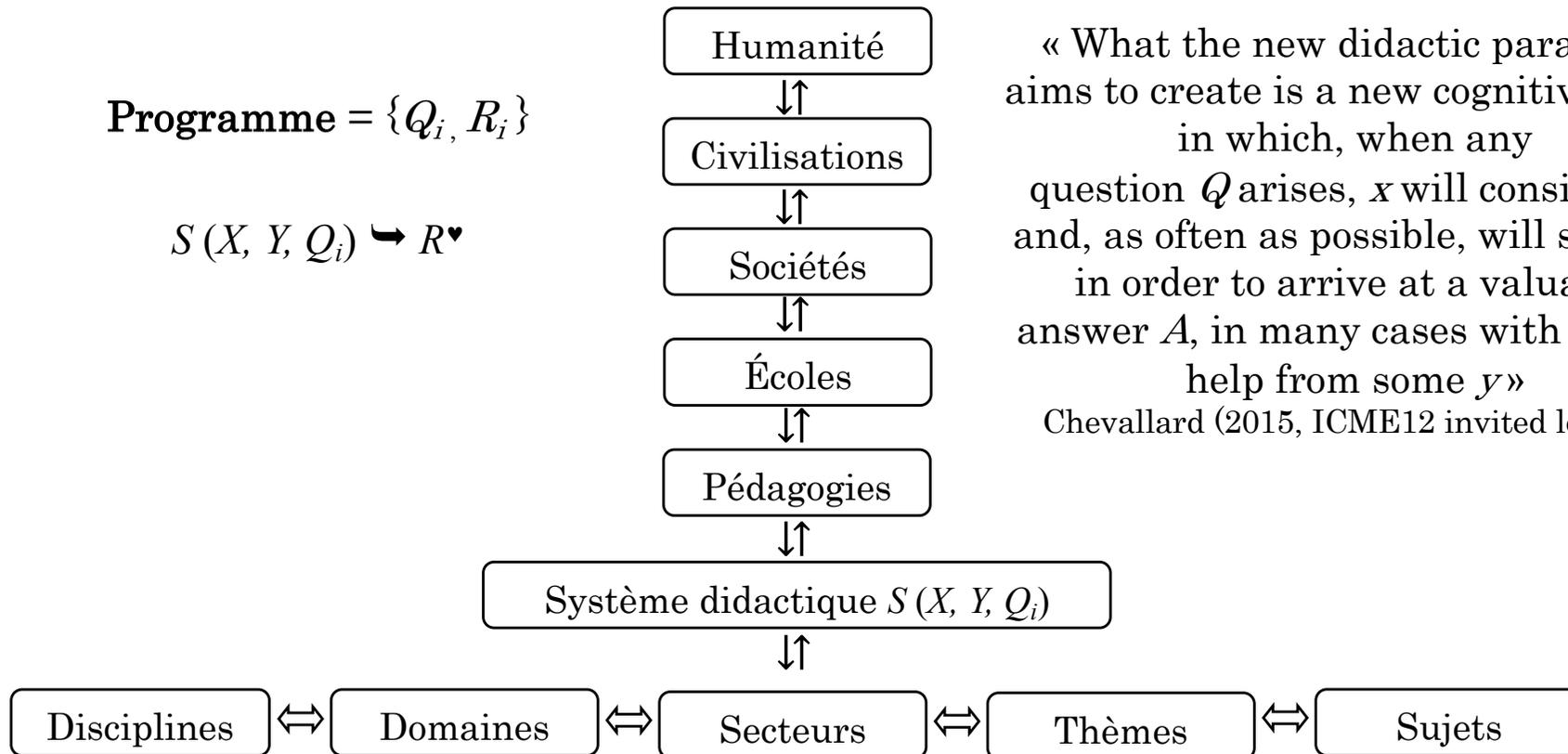
3. Outils épistémologiques et didactiques depuis la TAD

Et dans le **paradigme de questionnement du monde** ?

$$S(X, Y, p_i) \rightarrow S(X, Y, Q_i)$$

Programme = $\{Q_i, R_i\}$

$$S(X, Y, Q_i) \rightsquigarrow R_i$$





3. Outils épistémologiques et didactiques depuis la TAD

Hypothèse de recherche : Les **Parcours d'Étude et de Recherche** (PER) (Chevallard, 2005, 2006, 2015) apparaissent comme des dispositifs d'enseignement pour :

- Surmonter divers **phénomènes didactiques** liés au paradigme de la « visite des œuvres »
- Créer et étudier les **conditions qui favorisent** et les **contraintes qui empêchent** la mise en œuvre, l'intégration et la diffusion des **pratiques de MoMa**
- Introduire la MoMa et son analyse dans la formation des enseignants à travers l'implémentation de **Parcours d'Étude et de Recherche pour la Formation des Enseignants (PER-FE)**



3. Outils épistémologiques et didactiques depuis la TAD

Les Parcours d'Étude et de Recherche

1.PER : Une question génératrice Q_0 comme point de départ du PER

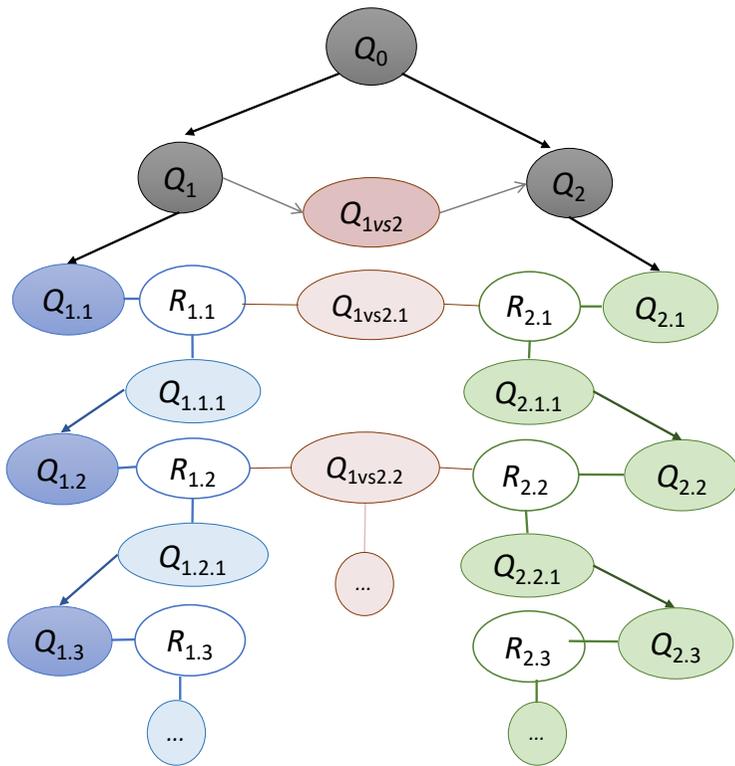
- Le point de départ du PER doit être une question « vivante » que nous appelons **question génératrice**. Son étude soulève de nombreuses nouvelles **questions dérivées** issues de Q_0

2.PER : Les PER ont une structure « arborescente » des questions et réponses → *Dialectique de questions-réponses*

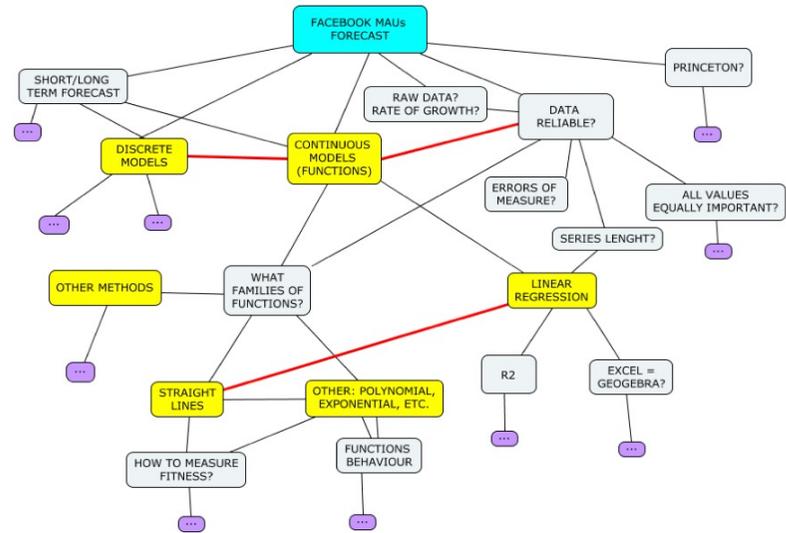
- L'étude de la question Q_0 et des questions dérivées Q_i conduit à la recherche de successives réponses R_i
- L'ensemble de Q_i et R_i définit une « carte » des possibles parcours à suivre dans le mise en œuvre d'un PER



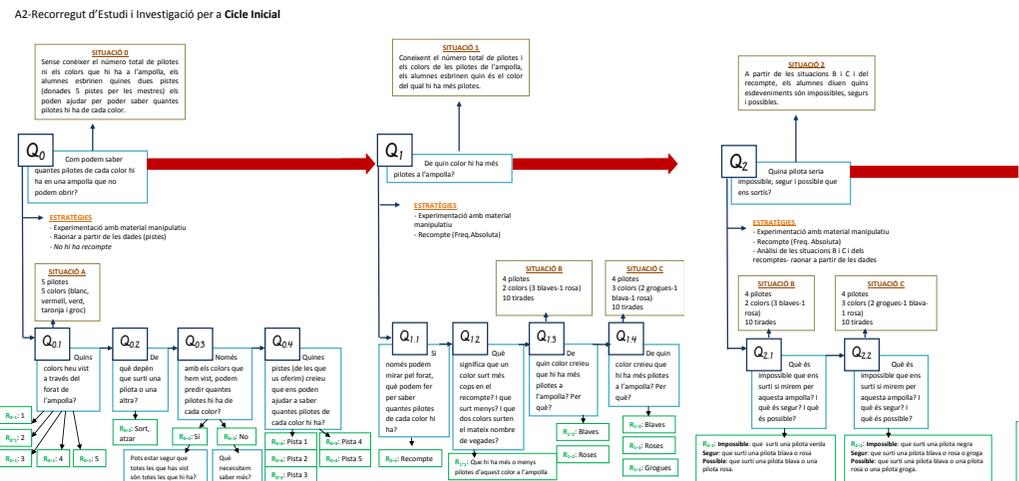
3. Outils épistémologiques et didactiques depuis la TAD



« Squelette questions-réponses » sur le PER dynamique populations



« Squelette questions-réponses » sur le PER utilisateurs Facebook





3. Outils épistémologiques et didactiques depuis la TAD

Les Parcours d'Étude et de Recherche

3.PER : Dans un PER, la construction de réponses a besoin de permettre la **consultation et l'étude de réponses préexistantes** dans les médias (contenus, outils, études sur des questions similaires, etc.) et créer les moyens pour que les élèves testent leur utilisation et leur validité → *Dialectique médias-milieus*

4.PER : Les PER ont besoin des nouvelles responsabilités à partager entre les élèves et les enseignants ou d'une nouvelle distribution → *Dialectique individu-collectif*

- Soulever de nouvelles questions, rédiger de rapports, planifier le travail, partager les résultats, valider les réponses, etc.



3. Outils épistémologiques et didactiques depuis la TAD

Ingénierie didactique comme méthodologie de recherche (Artigue, 2009)
pour la conception, implémentation et analyse des PER





4. Les PER pour l'enseignement de la MoMa et son écologie

Niveau	PER
<p data-bbox="156 462 470 686">Modalité 1: PER dans les « ateliers de modélisation »</p> <p data-bbox="257 774 504 829">Université</p>	<p data-bbox="560 502 1332 558">Études universitaires en Sciences</p> <ul data-bbox="560 574 1624 622" style="list-style-type: none">▪ Dynamique des populations (UAB, Barquero 2009) <p data-bbox="1713 454 1937 598"></p> <p data-bbox="560 630 1624 686">Études universitaires en Économie et Gestion</p> <ul data-bbox="560 702 2027 1109" style="list-style-type: none">▪ Prévisions de ventes (IQS, Serrano 2011)▪ Gestion de ressources humaines (IQS, Serrano 2011)▪ Dynamique d'utilisateurs de réseaux sociaux (IQS, Barquero & Serrano 2013)▪ Bicing : Un système de vélo partagé (IQS, Barquero & Serrano 2014)▪ Dynamique des utilisateurs de Facebook (Barquero, Monreal, Ruiz-Munzón, & Serrano, 2018) <p data-bbox="1870 646 2060 805"></p> <p data-bbox="1960 933 2060 1013"></p> <p data-bbox="560 1125 1512 1181">Études universitaires en Mathématiques</p> <ul data-bbox="560 1197 1848 1244" style="list-style-type: none">▪ Bicing : Un système de vélo partagé (UC, UAB, Barquero 2013)



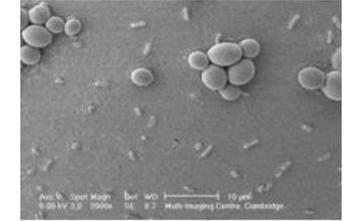
4. Les PER pour l'enseignement de la MoMa et son écologie

Niveau	PER
Modalité 2: un cours organisé autour d'un PER	<p data-bbox="1771 363 2063 515">Modalité 3: le PER à la fin du cours</p> <p data-bbox="535 517 1084 568">Formation d'ingénieurs</p> <ul data-bbox="535 580 2047 815" style="list-style-type: none"><li data-bbox="535 580 2047 691">▪ Comment produire une pièce de vélo ? Un dispositif orthopédique ? Un réducteur de vitesse? (EUSS, Florensa 2016-18)<li data-bbox="535 703 2047 815">▪ Comment concevoir et construire un sommier en lattes de bois pour une chaîne hôtelière des États-Unis ? (EUSS, Bartolomé 2016-18)
Université	<p data-bbox="535 903 1973 954">Formation initiale et continue de professeurs d'école P, S et U</p> <ul data-bbox="535 967 2047 1262" style="list-style-type: none"><li data-bbox="535 967 2047 1077">▪ Prévisions de ventes de Desigual Dynamique des utilisateurs de Facebook (CICATA, Romo, Barquero & Bosch, 2013-16)<li data-bbox="535 1090 2047 1141">▪ Prévion d'une épidémie (EUSS, Florensa, Bosch & Gascón, 2015-16)<li data-bbox="535 1153 2047 1262">▪ Introduction et évolution des systèmes de numération (UAM, Sierra & Nicolas, 2012-13 ; UB, Barquero et Sierra, 2016)



4.a. PER autour de la dynamique des populations

Barquero (2009)



Comment prévoir l'évolution de la taille des populations ?

Réponse auxquels phénomènes didactiques ?

- Quelles sont les mathématiques qui sont actuellement enseignées à l'université ?

Organisation standard des savoirs mathématiques à enseigner dans les premières années universitaires de mathématiques pour les Sciences Expérimentales :

Algèbre linéaire | Calcul différentiel et intégral | Équations différentielles.

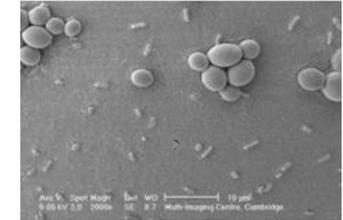
- Quels notions et idées dominantes sont liées aux mathématiques, à la MoMa et son enseignement ?

Pas de place pour l'activité de modélisation mathématique dans l'enseignement universitaire → Prédominance de ce qu'on a caractérisé comme « applicationnisme » (Barquero, Bosch et Gascón, 2013).



4.a. PER autour de la dynamique des populations

Barquero (2009)



Comment prévoir l'évolution de la taille des populations ?

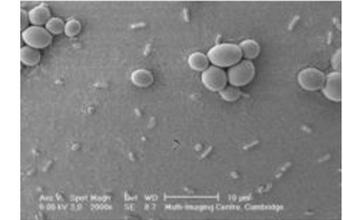
Réponse à quels phénomènes didactiques ?

- On pourrait penser que dans les études universitaires de Sciences, on dispose de très bonnes conditions institutionnelles pour l'enseignement de mathématiques outils de modélisation mathématique → une réalité utopique !
 - Pas de place pour l'activité de MoMa,
 - L'idéologie dominante sur l'enseignement de la MoMa : une application de connaissances préétablies,
 - On termine par une utilisation algorithmique des modèles déjà construits, qui limite tout questionnement sur l'origine, la pertinence et l'efficacité des modèles.



4.a. PER autour de la dynamique des populations

Barquero (2009)



Comment prévoir l'évolution de la taille des populations ?

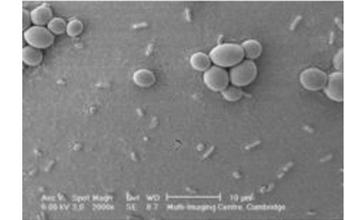
Réponse à quels phénomènes didactiques ?

[...] In this edition, you will find some **easier application to physics**, as extra chapters, some more difficult application of more applications. ...] Despite the incorporation of more applications, **this book is still a mathematics book, not a science book or an engineering book**. It is about calculus and its main basic ideas are limits, derivatives and integrals. **The rest is secondary, the rest could be left out.** Salas & Hille (1995, p.7)



4.a. PER autour de la dynamique des populations

Barquero (2009)



Comment prévoir l'évolution de la taille des populations ?

Conditions pour la mise en œuvre du PER ?

- Ce PER est expérimenté pendant toute l'année scolaire 2005/06 - 2009/10
- Élèves de « Fondements mathématiques pour l'ingénierie » étudiants de 1ère année d'ingénierie chimique industrielle (30 - 40 élèves)
- « Atelier de modélisation » à assistance volontaire en parallèle au Cours + TD
- La professeur du TD et de l'atelier est une chercheuse en didactique. Le responsable du cours est un mathématicien qui fait de la recherche en math appliquées à la biologie.
- Les élèves travaillent en groupe de 2 ou 3 et doivent fournir après chaque séance un « bilan d'étape » par écrit
- À la fin de chaque partie de l'atelier chaque élève doit préparer un rapport final



4.a. PER autour de la dynamique des populations

Barquero (2009). Comment prévoir l'évolution de la taille des populations ?

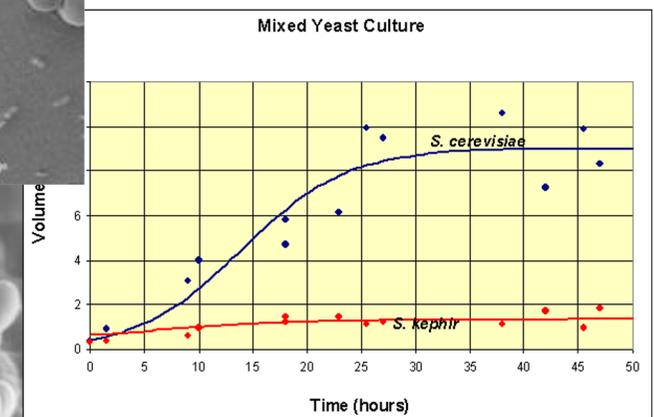
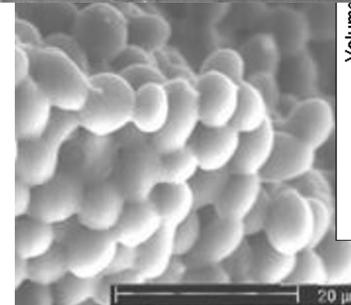
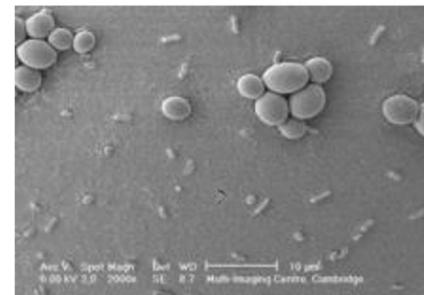
Quelle est la question génératrice ? Et l'analyse de cette question ?

Q_0 : Compte tenu de la taille de la population pendant certaines périodes,

- Peut-on prédire la taille de la population après n périodes ? Est-ce toujours possible de prévoir cette évolution à long terme ?
- Quelles hypothèses sur la population et son environnement doit-on faire ?
- Comment construire les prédictions et les tester ?



Année	Taille
1937	8
1938	26
1939	85
1940	274
1941	800
1942	1800



Première rencontre avec Q_0 : Exploration des données et élaboration d'un premier élément de réponse



Any	X	Tasa variació relativa	Tasa variació absoluta
1937	8		
1938	26	$= \frac{26-8}{8} = 2,25$	$= 26-8 = 18$
1939	85	$= 2,27$	$= 59$
1940	274	$= 2,22$	$= 189$
1941	800	$= 1,9$	$= 526$
1942	1800	$= 1,25$	$= 1000$

$$m(1940) = \frac{n(1941) - n(1940)}{n(1940)}$$

$$m(1942) = \frac{n(1942) - n(1941)}{n(1941)}$$
 (despejando la ecuación)

$$n(1941) = (m \cdot n(1940)) + n(1940)$$

$$n(1942) = (m \cdot n(1941)) + n(1941)$$

→ se relaciona así mediante la frecuencia relativa al número de patos de 2 años consecutivos

obteniendo el término general

$$n_0 = (1+m)^n(n_0)$$

$$y(x) = a \cdot e^{b \cdot x}$$

$$8 = a \cdot e^b \rightarrow \frac{8}{e^b} = a \approx \frac{8}{e^{1,08}} = 2,71$$

$$1800 = a \cdot e^{5b}$$

$$1800 = \frac{8}{e^b} \cdot e^{5b}$$

$$1800 = 8 \cdot e^{4b}$$

$$1800 = 8 \cdot e^{5b}$$

$$\frac{1800}{8} = e^{5b}$$

$$225 = e^{5b}$$

$$\ln(225) = \ln(e^{5b})$$

$$\ln 225 = 5b$$

$$b = \frac{\ln 225}{5}$$

$$b \approx 1,08$$

$$y(x) = 2,71 \cdot e^{1,08x}$$

Etude de la dynamique
d'une population

Étude $\{x_t\}$

Q_0

Modèles discrets
 $t \in \mathbb{N}$

Modèles continus
 $t \in \mathbb{R}$

Génération
mêlées

X_t dépend de x_{t-1}, \dots, x_{t-i}

PM_{D2}

Suites
récurrentes
d'ordre ≥ 2



$$X_{n+1} = M \cdot X_n \\ = M^{n+1} \cdot X_0$$

Algèbre linéaire

Génération
indépendantes

x_t dépend de x_{t-1}

$$r_n = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n}$$

PM_{D1}

Suites récurrentes
d'ordre 1

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Suites et sa convergence.
Fonctions d'une variable

Populations homogènes

$$r(t) = \frac{x'(t)}{x(t)}$$

PM_{C1}

EDO
Ordre 1

$$x'(t) = f(x(t))$$

EDO et systèmes d'EDOs

Populations mêlées

$r_x(t)$ et $r_y(t)$

PM_{C2}

EDO d'ordre ≥ 2



Systèmes EDO

Etude de la dynamique
d'une population

Étude $\{x_t\}$

Q_0

Modèles discrets
 $t \in \mathbb{N}$

Modèles continus
 $t \in \mathbb{R}$

Génération
mêlées

X_t dépend de x_{t-1}, \dots, x_{t-i}

PM_{D2}

Suites
récurrentes
d'ordre ≥ 2



$$X_{n+1} = M \cdot X_n \\ = M^{n+1} \cdot X_0$$

Partie 2_PER : Modèles
discrète pour l'étude de X
avec les générations mixtes

Génération
indépendantes

x_t dépend de x_{t-1}

$$r_n = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n}$$

PM_{D1}

Suites récurrentes
d'ordre 1

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Partie 1_PER : Modèles discrets
pour l'étude de X avec
générations séparées

Populations homogènes

$$r(t) = \frac{x'(t)}{x(t)}$$

PM_{C1}

EDO
Ordre 1

$$x'(t) = f(x(t))$$

Partie 3_PER : Modèles continus pour l'étude de la
dynamique des populations

Populations mêlées

$r_x(t)$ et $r_y(t)$

PM_{C2}

EDO d'ordre ≥ 2



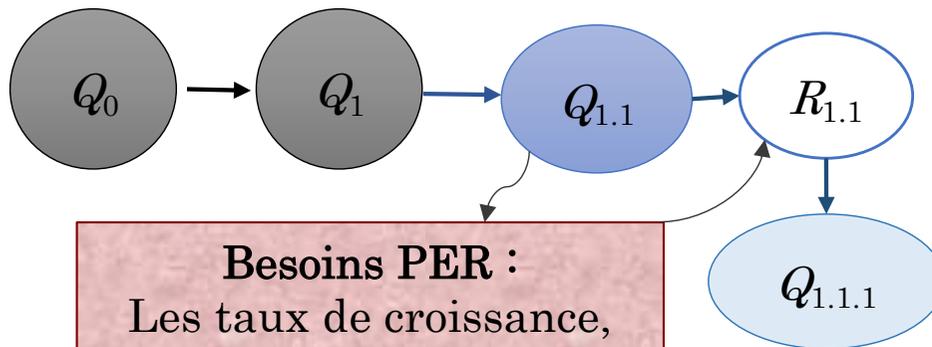
Systèmes EDO



4.a. PER autour de la dynamique des populations

Q_1 Si l'on considère le temps comme **valeur discrète**, quelles **hypothèses** sur le taux de croissance de X peut-on formuler ? Quels **modèles mathématiques** peut-on envisager ?

$Q_{1.1}$: En supposant que le **taux relatif de variation est constant (P)** comment évolue la population étudiée ?



Besoins PER :
Les taux de croissance, suites récurrentes et simulation numérique

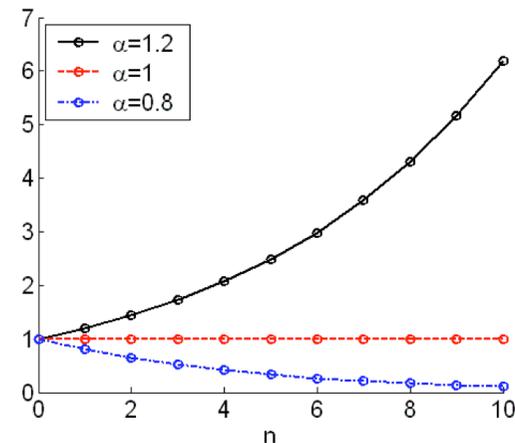
La première hypothèse valide la est le trouver

$$\frac{M(u+1)}{M(u)} = c, \quad \forall c \in \mathbb{R}, \text{ ou } c = \text{cte}$$

Ainsi on veut admettre que si on trouve une c valide, on peut définir la fonction $M(u+1) = c M(u)$ et il ne reste plus rien.

$R_{1.1}$: Construction du **modèle malthusien discret**

$Q_{1.1.1}$: Comment peut-on mettre une limite la croissance de la population ? **Paradoxe malthusien**

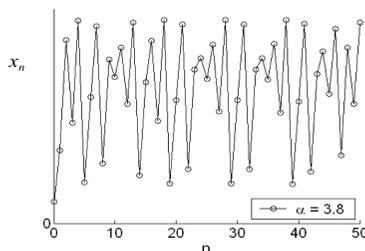
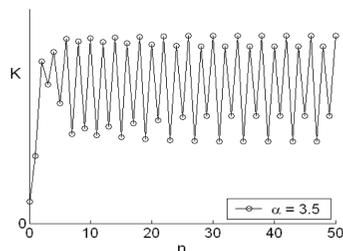
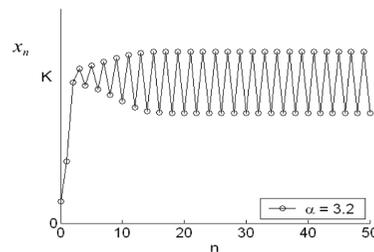
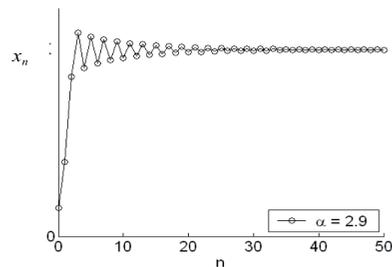
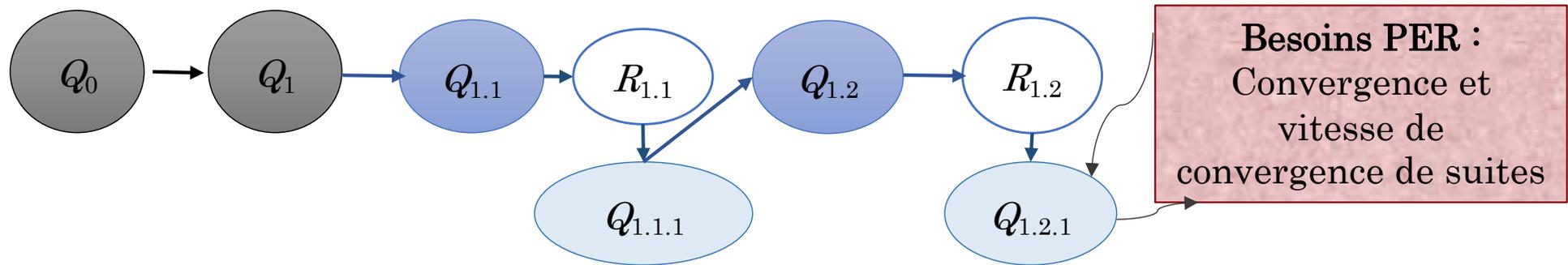




4.a. PER autour de la dynamique des populations

$Q_{1.2}$: Si nous supposons que le **taux relatif de variation décroît linéairement** et que K est la **taille maximale de la population**, comment évolue la population au cours du temps ?

$R_{1.2}$ Construction et étude du modèle logistique discret



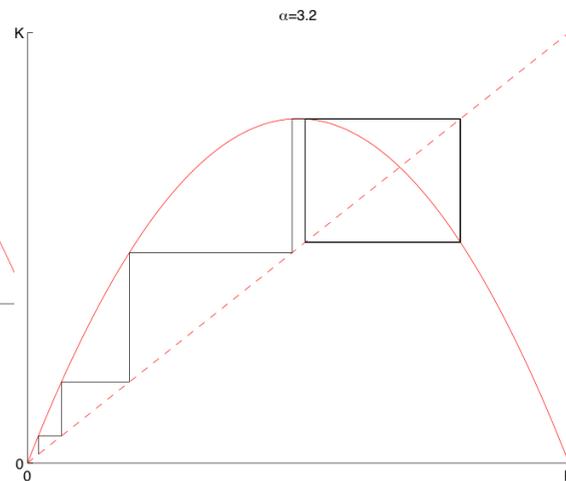
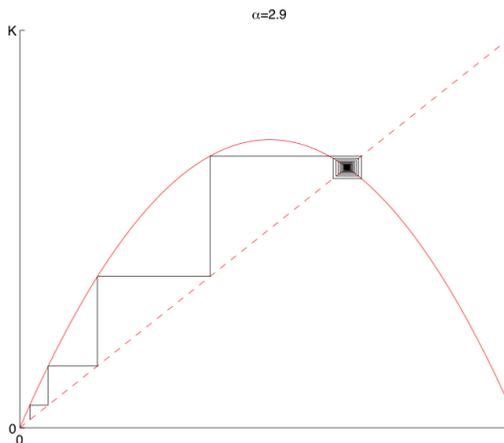
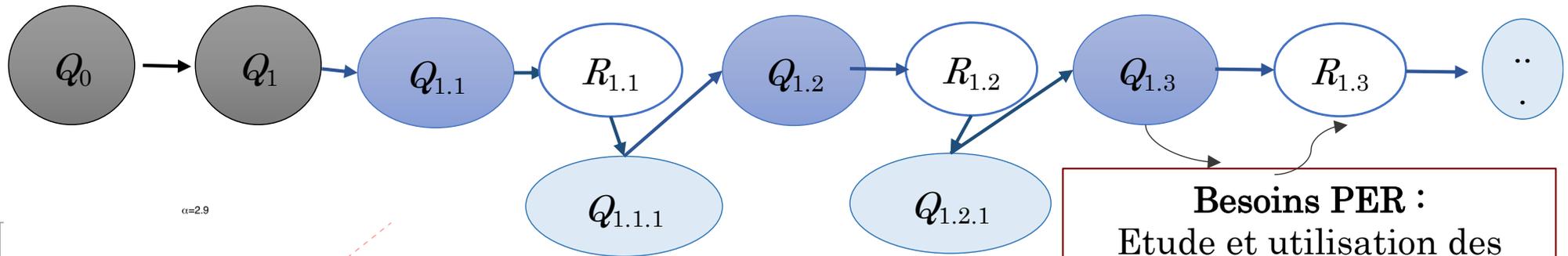
$Q_{1.2.1}$: En fonction de la valeur des paramètres définissant les simulations de modèles logistiques discrets, on trouve des comportements difficiles d'analyser. Qu'est-ce qui se passe ? Pour **quelles valeurs des paramètres** cela arrive ?



4.a. PER autour de la dynamique des populations

$Q_{1.3}$: Comment pouvons-nous repenser et développer les hypothèses dans lesquelles nous travaillons si l'on considère les modèles définis comme $x_{n+1} = f(x_n)$ avec f une fonction de classe C^1 ?

$R_{1.3}$: Techniques de simulation graphique, avec f une fonction C^1



Besoins PER :
Etude et utilisation des fonctions élémentaires : linéaire, quadratique, exponentielle, etc. et ses dérivées.

Besoins PER :
Solution graphique d'équations et inégalités

Etude de la dynamique
d'une population

Étude $\{x_t\}$

Q_0

Modèles discrets
 $t \in \mathbb{N}$

Modèles continus
 $t \in \mathbb{R}$

Génération
mêlées

X_t dépend de x_{t-1}, \dots, x_{t-i}

PM_{D2}

Suites
récurrentes
d'ordre ≥ 2



$$X_{n+1} = M \cdot X_n \\ = M^{n+1} \cdot X_0$$

Partie 2_PER : Modèles
discrète pour l'étude de X
avec les générations mixtes

Génération
indépendantes

x_t dépend de x_{t-1}

$$r_n = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n}$$

PM_{D1}

Suites récurrentes
d'ordre 1

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Partie 1_PER : Modèles discrets
pour l'étude de X avec
générations séparées

Populations homogènes

$$r(t) = \frac{x'(t)}{x(t)}$$

PM_{C1}

EDO
Ordre 1

$$x'(t) = f(x(t))$$

Partie 3_PER : Modèles continus pour l'étude de la
dynamique des populations

Populations mêlées

$r_x(t)$ et $r_y(t)$

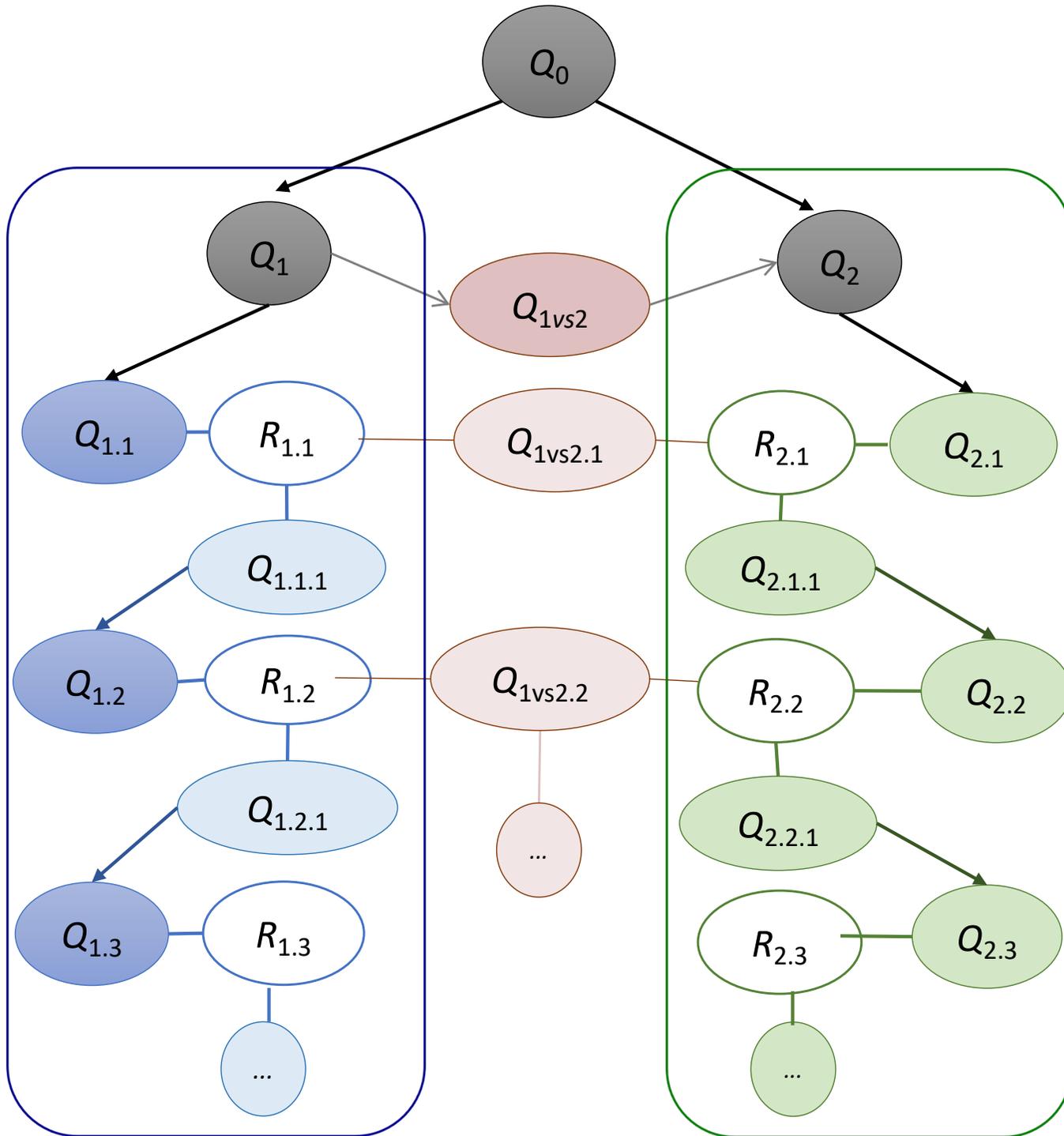
PM_{C2}

EDO d'ordre ≥ 2



Systèmes EDO

Partie 1_PER
Modèles
discrets pour
l'étude de X
avec
générations
séparées

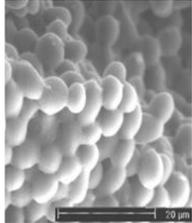


Partie 3_PER
Modèles
continus
pour l'étude
de la
dynamique
des
populations



4.a. PER autour de la dynamique des populations

Modalité 1: PER
dans les « ateliers
de modélisation »



Quelques conditions pour ce PER ?

- L'étude de Q_0 permet de couvrir une grande partie du programme prévu pour les cours Math 1ère année
- La structure arborescente ouverte du PER s'enrichit au cours de chaque expérience et y compris de nombreux itinéraires possibles selon les modèles considérés
- Quelques responsabilités ont pu être transférées aux étudiants: travail collaboratif en groupe, planification du travail, rédaction de rapports, mises en commun des résultats, « secrétaire de la semaine », etc.
- Chaque année les différents dispositifs (Cours, TD et atelier) étaient mieux intégrés.

Quelques contraintes sur ce PER ?

- Besoin de briser la rigidité de la structure classique dans l'enseignement universitaire « théorie | problèmes | examen » pour inclure le PER.
- Besoin de créer un discours mathématique ad-hoc sur la modélisation mathématique, qui est absent dans l'activité et le discours des cours et TD
- Lorsque la chercheuse en didactique fût remplacée par un nouvel enseignant (mathématicien), la durée du PER se « comprima » à un seul mois...



4.a. PER autour de la dynamique des populations

Question génératrice du PER

Q_0 : Les prévisions publiées par Princeton en 2014 sur l'évolution future des utilisateurs de Facebook peuvent-elles être vraies ? Comment pouvons-nous modéliser et ajuster les données réelles des utilisateurs de Facebook pour fournir nos prévisions et les vérifier par rapport à celles de Princeton ?

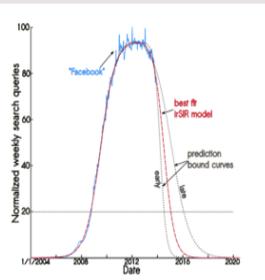
2015/16

LA POLEMICA SOBRE FACEBOOK

Nos centraremos en el estudio de una de las redes sociales más importantes en la actualidad: FACEBOOK.

FACEBOOK ha sido foco de muchos estudios, algunos de ellos bastante polémicos, por ejemplo, una investigación realizada por la Universidad de Princeton publicó en 2014 que "FACEBOOK perdería el 80% de sus usuarios antes de 2017".

Se pueden leer más detalles de tan arriesgada noticia en [The Independent \(23 de Enero 2014\)](#)



Nos centraremos en el estudio de una de las redes sociales más importantes en la actualidad: FACEBOOK.

Consideramos que este fenómeno de expansión y evolución de las redes sociales resulta sumamente interesante y merece ser estudiado, por ello, hemos recibido un importante encargo de la consultora "MS2-Mathematical solutions" que está interesada en que desarrollemos un estudio sobre la siguiente cuestión:

¿Pueden ser ciertos los pronósticos de Princeton al afirmar que en 2017 FACEBOOK habrá perdido el 80% de sus usuarios? ¿Cómo podemos corroborar o refutar los pronósticos que nos da este estudio?

$C_{inicial}$

¿Cuál será la evolución de los usuarios de FACEBOOK a corto, medio y largo plazo?

A lo largo de este proyecto, vamos a centrarnos en estudiar esta cuestión inicial que nos ha presentado "MS2-Mathematical solutions".

Para ello vamos a fragmentar el estudio en tres fases:

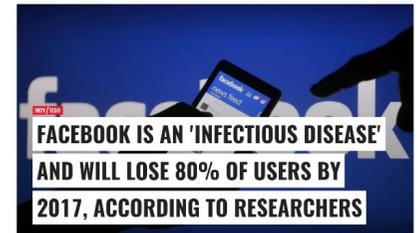
La primera centrada en que los equipos de consultores busquen datos reales sobre la evolución de FACEBOOK.

Una segunda sobre la propuesta de modelos matemáticos que puedan ayudar a ajustar estos conjuntos de datos reales y hacer pronóstico sobre la futura evolución de la red social

Finalmente, una tercera donde cada grupo deberá dar respuesta a la cuestión inicial de partida redactando un informe final como respuesta a este encargo.



2016/17 – 2019/20



TALLER DE CREATIVIDAD MATEMÁTICA EN EL CONTEXTO DE LA ASIGNATURA DE FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICAS PARA LA EMPRESA

mathematical creativity squared

Curso 2016-2017

Comparando realidad contra previsión: el caso de los usuarios de FACEBOOK

¿Qué es una red social? Una red social es una forma de representar una estructura social formada por dos elementos: los usuarios de esta red, sean individuos u organizaciones, y las relaciones que existen entre ellos. Estas relaciones pueden ser de distintos tipos: económicas, profesionales, de amistad, entre otros. En la actualidad, las redes sociales son una de las principales estructuras de Internet, produciendo un gran cambio en la forma de comunicarse e interactuar. El estudio de las estructuras de las redes sociales son herramientas muy útiles para analizar las dinámicas de estas e identificar patrones locales o globales de comportamiento social.

Nos centraremos en el estudio de una de las redes sociales más importantes en la actualidad: FACEBOOK. La red social de FACEBOOK ha sufrido grandes cambios desde sus inicios a mediados del 2007, ha sido traducida a muchos idiomas: alemán, francés y español, entre otros, lo que marcó el inicio de su internacionalización y el impulso para su expansión. Se sabe que en octubre de 2014, la red cuenta con 1200 millones de usuarios y ya había traducido a 170 idiomas.

FACEBOOK ha sido foco de muchos estudios, algunos de ellos bastante polémicos. Como por ejemplo, el estudio que publicó el periódico "The Independent" en 2014 sobre una investigación realizada por la Universidad de Princeton publicó en 2014 asegurando que FACEBOOK perdería el 80% de sus usuarios antes de 2017. En realidad,

Se pueden leer más detalles de esta arriesgada noticia en [http://www.independent.co.uk/news/technology/facebook-will-lose-80-of-users-by-2017-9574842.html](#)

FACEBOOK es todo lo que nos rodea a la hora de estudiar, seguramente estamos sus después de usar los mismos modelos matemáticos y algoritmos que Princeton y poder proporcionar el cierto resultado de esta Universidad.

Consideramos que este fenómeno de expansión y evolución de las redes sociales resulta sumamente interesante y merece ser estudiado, por ello, hemos recibido un importante encargo de la consultora "MS2-Mathematical solutions" que está interesada en que desarrollemos un estudio sobre la siguiente cuestión:

¿Pueden ser ciertos los pronósticos de Princeton al afirmar que en 2017 FACEBOOK habrá perdido el 80% de sus usuarios? ¿Cómo podemos corroborar o refutar los pronósticos que nos da este estudio?

A lo largo de este proyecto, vamos a centrarnos en estudiar esta cuestión inicial que nos ha presentado "MS2-Mathematical solutions" y para ello vamos a fragmentar el estudio de FACEBOOK en tres fases:

La primera fase está centrada en que los equipos de consultores busquen datos reales sobre la evolución de FACEBOOK que nos ha presentado "MS2-Mathematical solutions".

La segunda fase está centrada en que los equipos de consultores busquen datos reales sobre la evolución de FACEBOOK que nos ha presentado "MS2-Mathematical solutions".

Finalmente, una tercera donde cada grupo deberá dar respuesta a la cuestión inicial de partida redactando un informe final como respuesta a este encargo.

Se pueden leer más detalles de esta arriesgada noticia en [http://www.independent.co.uk/news/technology/facebook-will-lose-80-of-users-by-2017-9574842.html](#)



4.b. PER en Résistance des Matériaux



Bartolomé, Florensa et al. (2018)

Comment concevoir et construire un sommier en lattes de bois pour une chaîne hôtelière des États-Unis ?

Réponse auxquels phénomènes didactiques ?

- Détachement entre pratiques professionnelles des ingénieurs et sa formation universitaire
- « Algorithmisation » très forte des tâches classiques du domaine

Conditions pour la mise en œuvre du PER ?

- Le PER est conçu pour toutes les sessions du cours (6 ECTS, 4h/semaine/15 semaines)
- 1 Groupe de 30 étudiants qui va se réorganiser chaque semaine en petits groupes



4.b. PER en Résistance des Matériaux



Bartolomé, Florensa et al. (2018)

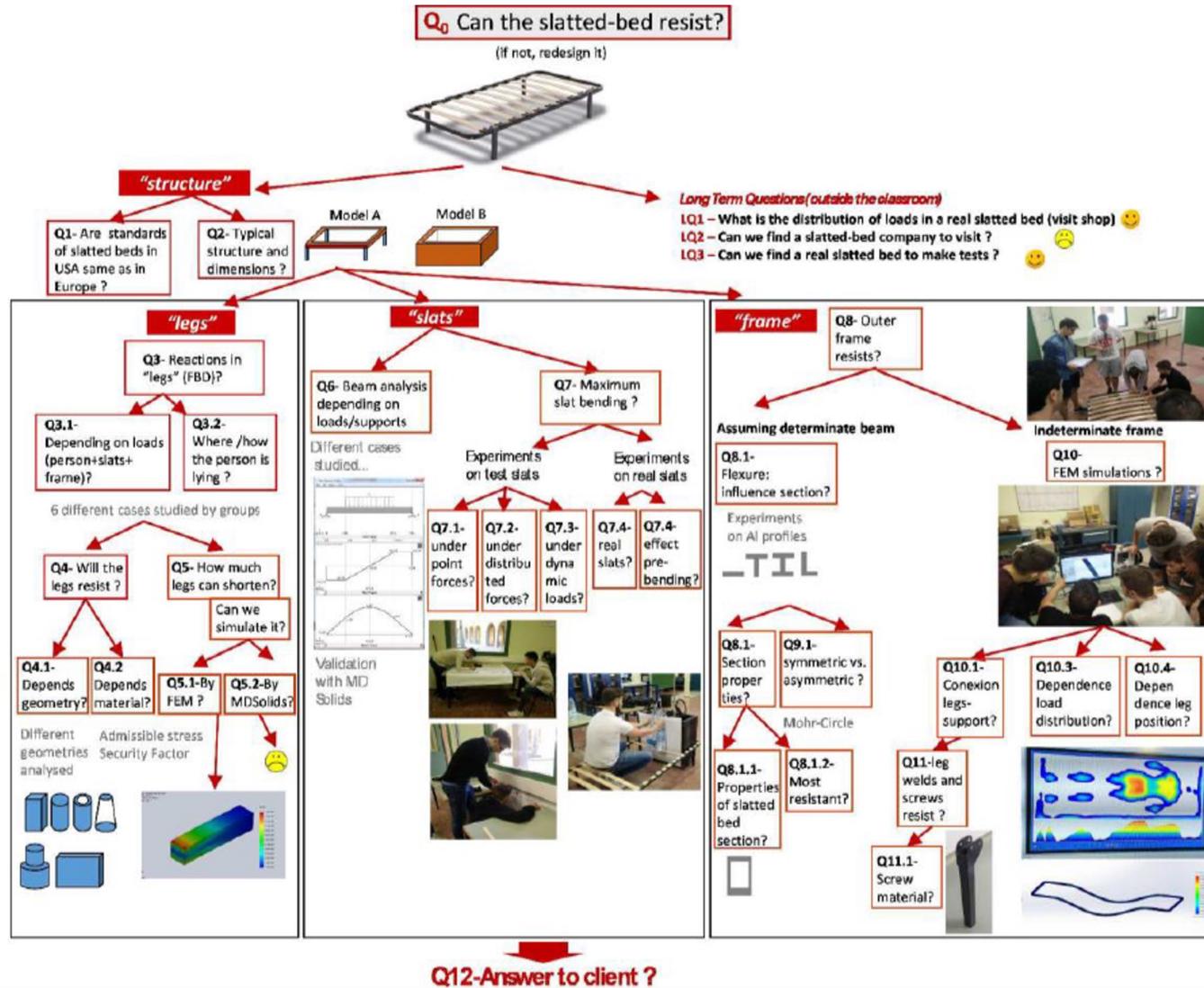
Comment concevoir et construire un sommier en lattes de bois pour une chaîne hôtelière des États-Unis ?

Caractéristiques de l'analyse épistémologique du PER ?

- Les « **cartes de questions et réponses** » jouent un rôle clé : elles sont utilisées par des chercheurs et professeurs pendant l'analyse *a priori* mais aussi par les étudiants pendant l'implémentation du PER
- La première séance du cours restait réservée à une **formation des étudiants sur l'utilisation de cartes de questions et réponses** afin de faciliter leur incorporation comme outils décrivant les savoirs qui vont apparaître pendant le PER



4.b. PER en Résistance des Matériaux





4.b. PER en Résistance des Matériaux

Modalité 2: un cours
organisé autour
d'un PER



Quelques conditions sur ce PER ?

- Le questionnement du modèle épistémologique se situe au niveau de la discipline : le cours de résistance des matériaux est profondément changé
- Avoir partagé le processus de conception avec les professeurs de ce cours, et des autres, fait que ce changement soit explicite et apparaisse comme justifié et nécessaire

Quelques contraintes sur ce PER ?

- **Contrat didactique** : même si les élèves sont explicitement formés sur l'utilisation des *cartes de questions et réponses*, ils ont de vraies difficultés pour inclure le travail non productif, les hypothèses erronées, ...
- Le dépassement des « frontières » traditionnelles des expertise disciplinaires et des programmes traditionnels pose des problèmes



5. Conclusions et discussion

L'étude de l'écologie des PER au niveau universitaire a permis pendant cette dernière décennie ...

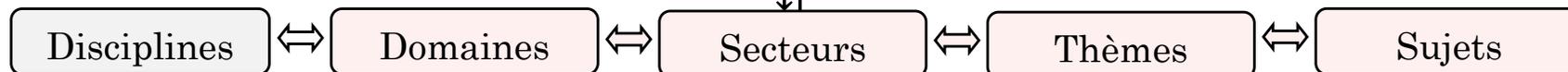
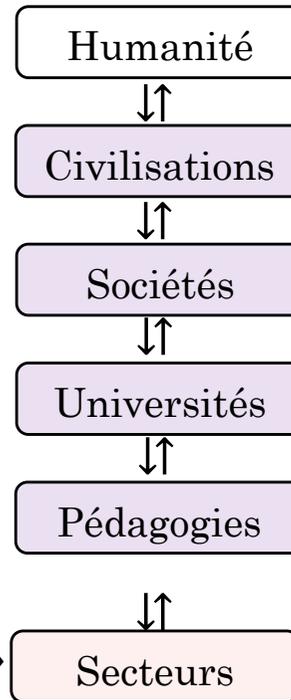
- D'approfondir dans l'étude des **phénomènes didactiques** conséquence du « paradigme des visite des œuvres »
- De progresser dans la création de nouveaux outils d'**analyse épistémologique et didactique** pour la conception, expérimentation et analyse des PER
- Analyser les « **invariants écologiques** » qui apparaissent à différents niveaux de généralité



5. Conclusions et discussion

Contraintes qui affectent l'enseignement de la MoMa

- Absence de *logos* pour « parler » sur l'activité de modélisation
- Absence de travail d'écriture/rédaction en mathématiques
- Contrat didactique traditionnel face aux nouvelles responsabilités des étudiants



Aux niveaux de civilisation et société

- Le programme d'études comme une suite de praxéologies « à visiter »
- Accès rapide à la connaissance
- Rôle secondaire des questions à étudier

Aux niveaux de l'école et la pédagogie

- « Applicationnisme » comme conception dominante de la modélisation mathématique
- Organisation de l'étude en séances courtes liés aux thèmes d'étude
- Le travail et l'évaluation individuels s'imposent au travail en groupe
- « Lecturing » vs. diriger des enquêtes

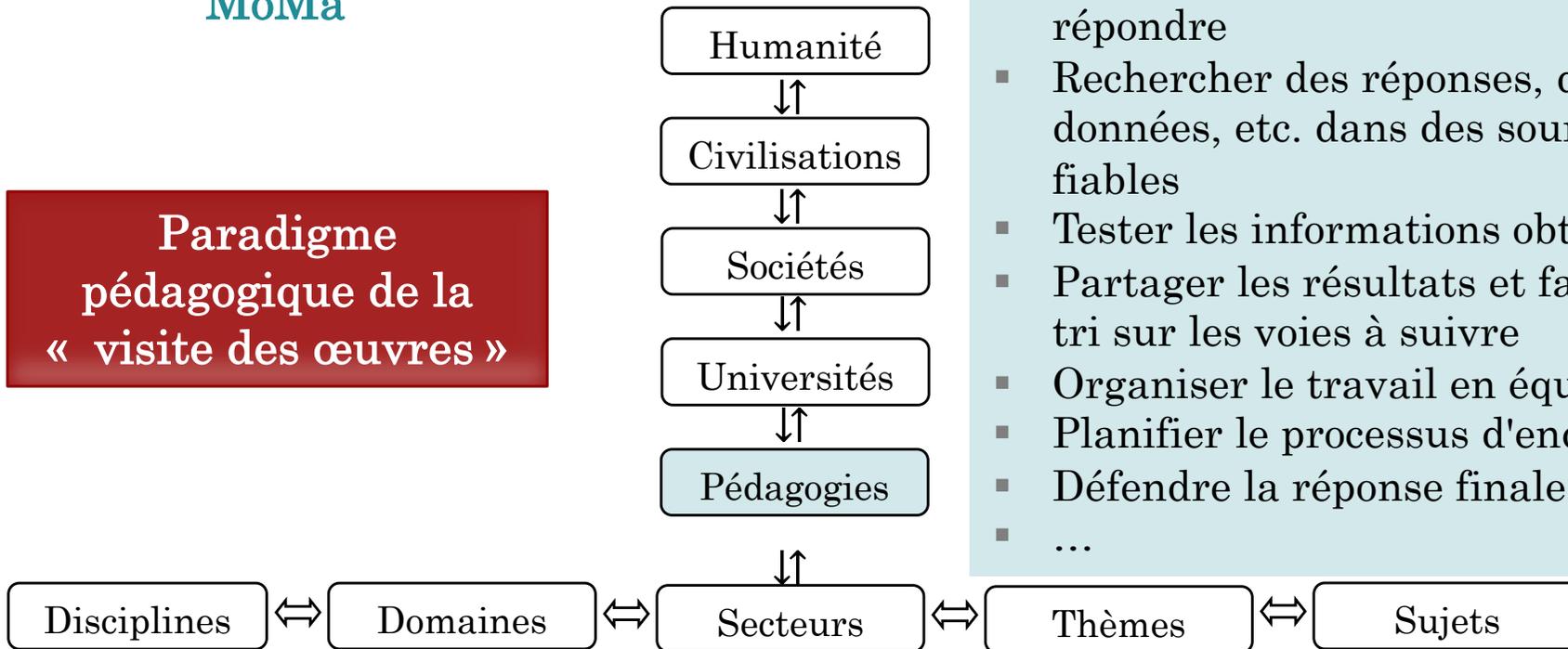
- Des programmes organisés en thèmes, secteurs et domaines très standard
- Rigidité de l'organisation conceptuelle des connaissances mathématiques



5. Conclusions et discussion

Contraintes qui affectent l'enseignement de la MoMa

Paradigme pédagogique de la « visite des œuvres »



Manque de « routines » et « dispositifs » pour aider les étudiants à :

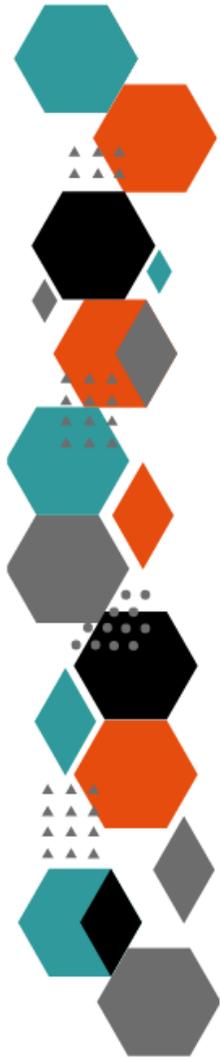
- Soulever des questions et y répondre
- Rechercher des réponses, des données, etc. dans des sources fiables
- Tester les informations obtenues
- Partager les résultats et faire un tri sur les voies à suivre
- Organiser le travail en équipe
- Planifier le processus d'enquête
- Défendre la réponse finale
- ...



5. Conclusions et discussion

L'étude de l'écologie des PER et le problème de leur diffusion aux niveaux **universitaire** a permis cette dernière décennie...

- **Fragilité de la mise en œuvre des PER** en fonction de la connaissance didactique de l'enseignant.
- Lorsque des enseignants non-didacticiens prennent la responsabilité de la mise en œuvre d'un PER, certaines **contraintes deviennent plus explicites** et de nouveaux **outils spécifiques** semblent nécessaires.
- La mise en œuvre des PER est un processus qui nécessite des changements profonds dans le **contrat didactique**.
- Les **conditions de diffusion et survie** des PER doivent également être prises en compte, ce qui ouvre un débat avec la **communauté des mathématiciens**, ainsi que d'autres communautés scientifiques.



La modélisation mathématique et les parcours d'étude et de recherche : Formats d'enseignement du PER au niveau universitaire et son écologie

Merci beaucoup

Berta Barquero Farràs

Faculté Education. Section de Didactique des Mathématiques. Université de Barcelone. bbarquero@ub.edu

École Thématique DEMIMES . Autrans, 4 Avril 2022