Exemples d’analyses didactiques d’un problème de physique (niveau L1) : Chute d’une bille dans un liquide

Une bille en verre (masse volumique μ, rayon r) est lâchée, sans vitesse initiale, à la surface d'un tube vertical contenant de l'huile de ricin (masse volumique μ_o). On donne : r = 1 mm ; μ = 2600 kg / m^3 ; μ_o = 970 kg / m³ ; g = 9,81 $m.s^{-2}$.

Pour les analyses en termes de praxéologies, on considérera pendant tout le problème que la théorie Θ est la mécanique Newtonienne.

a) Exprimer, en fonction de l'intensité de la pesanteur terrestre g, du rayon r de la bille et des masses volumiques μ et μ_o, le poids P et la poussée d'Archimède Π exercée par le liquide sur la bille.

Analyses avec la TAD

Type de tâches 1 : Exprimer une grandeur physique en fonction d’autres grandeurs physiques données, en utilisant des relations connues (tâches : exprimer P en fonction de g, r et μ ; et exprimer Π en fonction de g, r, et μ_o).
Technique : Trouver les relations connues qui vont permettre de relier la grandeur physique à exprimer aux grandeurs physiques données, et établir la formule voulue.
Ici :
Appliquer la formule P = mg. Pour appliquer cette formule, il faut déterminer m.
« Déterminer m » est aussi une tâche relevant du type de tâches 1 ; on peut dire qu’il constitue ici un « ingrédient de technique ». La technique pour déterminer m consiste à utiliser la formule m = μV, où V désigne le volume de la bille. Il faut donc déterminer le volume de la bille (encore une tâche relevant du type de tâches 1). La technique pour déterminer V consiste à appliquer la formule du volume d’une sphère : V = $(4/3)\pi r^3$.
Appliquer la formule $\Pi = m_f g$, où m_f désigne la masse de liquide déplacée par la bille. Pour appliquer cette formule, il faut déterminer m_f (encore une tâche relevant du type de tâches 1).
La technique pour déterminer m_f consiste à utiliser la formule $m_f = \mu_0 V$, où V désigne le volume de la bille. On a calculé V à la question précédente.
Technologie : les éléments technologiques sont les formules utilisées. Ici, P = mg, m = μV, V = $(4/3)\pi r^3$, ainsi que le théorème « la poussée d’Archimède exercée par un liquide sur un corps immergé est égale au poids du liquide déplacé » qui justifie la formule $\Pi = m_f g$.

Remarque :
- Ici la poussée d’Archimède comme le poids ne sont pas les vecteurs mais les normes de ces vecteurs appelées intensités en physique.
- Les différentes formules ne sont pas rappelées, elles sont supposées connues.

Analyses avec la TA (théorie de l’activité)

Remarque : l’analyse en terme de TA embarque une dimension cognitive. Elle n'est pas absolue comme l’analyse en terme de TAD car elle dépend du contexte au sein duquel la tâche (l’exercice) est proposée à des étudiants. On suppose que les étudiants ont déjà étudié la mécanique Newtonienne au lycée, puis ont eu des cours et des TD en L1 avant de se voir proposer cet exercice. Alors l’exercice peut être considéré comme assez classique pour eux dans le champ de la physique.

Connaissances à mettre en fonctionnement : la mécanique Newtonienne, plus précisément P = mg, m = μV. La poussée d’Archimède égale au poids du volume déplacé. Mélange avec des connaissances de géométrie élémentaire : volume d’une sphère V = $(4/3)\pi r^3$. Aussi des connaissances « transversales » pour (se) représenter la situation (sur un schéma), et pour associer la bille à une sphère.

Statut des connaissances : anciennes, remises en fonctionnement à l’occasion du cours et des TD en L1. Les connaissances de géométrie sont des connaissances très anciennes. La modélisation de la bille par une sphère a dû déjà être rencontrée, d'autant plus que le rayon est donné et cela fait penser à une sphère (et les étudiants ont des bonnes représentations internes de ce qu'est une bille).

Niveau de mise en fonctionnement des connaissances : les connaissances de mécanique sont supposées « mobilisables » car explicitement appelées par l’énoncé (il y a des indices) : le poids est demandé mais sont fournies la valeur de g qui fait penser à P = mg ; de la même façon, les masses volumiques sont fournies donc on pense facilement à $m = \mu V$. La formule du volume de la sphère relève également du niveau mobilisable car les étudiants savent qu'ils doivent l'utiliser, sous réserve qu'ils aient associé la bille à une sphère. Par contre c'est une formule très ancienne, qui si elle n'a pas été remobilisée en TD, peut poser des difficultés à des étudiants pour s'en souvenir.

Dans la deuxième partie de la question, le lien entre la poussée d'Archimède et le poids du volume déplacé relève également du niveau mobilisable dans la mesure où on considère que ce genre d'exercice est routinisé en L1. Il n'y a donc pas vraiment de connaissances qui doivent être « disponibles » (mises en fonctionnement sans être appelées explicitement ou même implicitement compte tenu du contexte).

Adaptations des connaissances à mettre en fonctionnement et activités :

- la représentation externe ou interne préalable de la situation, **à la charge des étudiants** (activités de **représentation, interprétation**)
- dans la première partie, la composition des 3 formules (traitement qui peut être considéré comme complexe compte tenu du profil de nos étudiants actuels, activité de **pilotage** du calcul littéral) + le mélange avec des connaissances de géométrie élémentaire : elles peuvent ne pas être mobilisables si un exercice mettant en jeu une bille n'a pas été refait avant, notamment la **reconnaissance** de la sphère comme modèle de la bille.
- dans la deuxième partie, le changement de point de vue entre la recherche de la poussée d'Archimède et la recherche du poids du liquide déplacé : si ce **changement de point de vue** n'a pas été routinisé en TD, il peut poser des difficultés aux étudiants + réutilisation du volume de la bille calculé dans la première partie avec une **réinterprétation** du rôle de ce volume (volume de la bille / volume d'eau que la bille déplace).

b) Établir l'équation différentielle du mouvement de la bille sachant que, dans le domaine de vitesse étudié, la force de frottement fluide peut s'écrire sous la forme : $\mathbf{F} = -6\pi\eta r\mathbf{v}$(relation de Stokes, valable lorsque la vitesse reste faible) η est le coefficient de viscosité du liquide **v** est le vecteur vitesse de la bille en translation rectiligne r est le rayon de la bille On pose : $\tau = (2\mu r^2)/(9\eta)$ la constante de temps du système et $C = (1-(\mu_0/\mu))g$ une constante. Vérifier l'homogénéité de l'équation différentielle.

Analyses avec la TAD

Type de tâches 2 : Établir l'équation différentielle qui modélise un mouvement.
Technique :
Faire le bilan des forces s'exerçant sur la bille (**type de tâches 2.1** : faire un bilan de forces). Ici trois forces s'exercent sur la bille : **P**, Π et **F**. Elles ont toutes la même direction, mais des sens différents, on introduit un vecteur unitaire **j** (orienté arbitrairement vers le bas) pour s'affranchir ensuite des vecteurs dans la seconde loi de Newton (projections de vecteurs). L'expression de la force **F** est donnée dans l'énoncé ; les normes (intensités en physique) du poids **P** et et de la poussée d'Archimède Π ont été déterminées à la question a).
Appliquer la formule de la deuxième loi de Newton : $\mathbf{P} + \Pi + \mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\,(dv/dt)\,\mathbf{j}$ avec **a** vecteur accélération qui est ensuite exprimé en fonction de la vitesse.
Ensuite chaque force est remplacée par son expression, et on supprime le vecteur unitaire **j** de l'équation pour obtenir une équation différentielle en v.
On obtient $(4/3)\pi r^3(\mu-\mu_0) - 6\pi\eta rv = m(dv/dt)$, qu'on simplifie pour aboutir à $(dv/dt)+((9\eta)/(2\mu r^2))v = (1-(\mu_0/\mu))g$.
On reconnaît qu'on peut écrire cette équation sous la forme $(dv/dt)+(v/\tau) = C$ avec τ et C qui ont été définies dans l'énoncé.

Technologie : Deuxième loi de Newton : la somme des forces est égale à la masse fois l'accélération ; le concept de bilan de forces. La vitesse est une fonction du temps, l'accélération est la dérivée de la vitesse par rapport au temps.
Ici : Relation de Stokes pour la force de frottement fluide (donnée dans l'énoncé).

Type de tâches 3 : Vérifier l'homogénéité d'une équation. (Ici : l'équation différentielle trouvée précédemment)
Technique : On exprime les dimensions des différents termes de l'équation différentielle pour vérifier si l'équation est homogène. On cherche quelles sont les dimensions fondamentales présentes dans l'équation.

Ici : Une vitesse est une distance divisée par une durée, donc en $L.T^{-1}$. Une accélération est donc en $L.T^{-2}$. L'énoncé donne g aussi en $L.T^{-2}$. L'énoncé dit que τ est la constante de temps du système, donc τ est une durée, en T.

Technologie : La définition de l'homogénéité d'une formule en physique (les dimensions sont les mêmes de part et d'autre de l'équation), la nature des différentes grandeurs dans la formule, les dimensions fondamentales : L (longueur), T (temps), M (masse), I (intensité électrique), Θ (température), N (quantité de matière) et J (intensité lumineuse).

Remarques :
- Ici les forces sont des vecteurs, il faut tenir compte de leur sens. Mais les termes « sens » et « direction » n'apparaissent pas dans la résolution.
- La phrase « On pose : $\tau = (2\mu r^2)/(9\eta)$ la constante de temps du système et $C = (1-(\mu_0/\mu))g$ une constante. » dans l'énoncé prend son sens lorsqu'on a simplifié l'équation différentielle. En maths on aurait certainement écrit : « Montrer que l'équation peut s'écrire $(dv/dt)+(v/\tau) = C$ avec des constantes avec τ et C *qu'on déterminera en fonction des données de l'énoncé.*
- L'homogénéité ici concerne les grandeurs physiques qui interviennent dans l'équation différentielle. C'est sans rapport avec la notion d'équation différentielle homogène en mathématiques (où il convient aussi de distinguer les « équations différentielles linéaires homogènes » et les « équations différentielles homogènes »).

Analyses avec la TA (théorie de l'activité)

Connaissances mises en fonctionnement : mécanique Newtonienne : deuxième loi de Newton, relation de Stockes, lien vitesse et accélération (= dérivée de la vitesse). Pour la deuxième question, grandeurs physiques, dimension des grandeurs physiques vitesse, accélération ; homogénéité d'une formule/équation du point de vue des dimensions.
Remarque : En physique, la dimension d'une grandeur renseigne sur sa nature physique. Par exemple une distance, un périmètre, un intervalle spatial ont tous pour dimension une longueur. C'est une caractéristique beaucoup plus générale que son unité. Pour exprimer une grandeur physique munie d'une dimension, on choisit des unités. Une même dimension peut s'exprimer avec une multitude d'unité. Par exemple, une longueur peut ainsi s'exprimer en mètre, centimètre, Angström, mile,...

Statut des connaissances : anciennes, remises en fonctionnement à l'occasion du cours et des TD en L1.

Niveau de mise en fonctionnement : mobilisable (appelées par l'énoncé). Pour la relation de Stockes, elle est fournie par l'énoncé, il suffit de l'appliquer directement.

Adaptations des connaissances et activités : *à nouveau ces activités ont pu être plus ou moins routinisées en TD de L1, sinon ce sont de véritables adaptations des connaissances des étudiants*

- **représentation** de la situation avec le bilan des forces, **reconnaissance** de la dimension 1 (vecteurs dans une seule direction) ; **interprétations** : poids vers le bas, poussée d'Archimède et forces de frottement vers le haut, le sens de vecteurs, le vecteur vitesse dans le du mouvement (interprétation des données de l'énoncé : vitesse en mouvement rectiligne), **choix** du repère... (à la charge de l'étudiant)
- **organisation** (à la charge de l'étudiant, lien avec le contrat didactique) : identification du référentiel, du système, du repère, le bilan des forces et les projections des forces dans le repère
- **reconnaissance** de la différence de nature entre les vecteurs forces et le vecteur vitesse (activité a maxima, *ie* pas pour tous les étudiants)
- réutilisation de la question précédente pour avoir les normes des vecteurs poids et poussée d'Archimède
- **Reconnaissance d'une relation dynamique**, introduction de la variable *t* avec passage du vecteur a au vecteur dv/dt le cas échéant
- Mise en équation vectorielle puis scalaire (projection sur l'axe (O,**j**), **traitement complexe** avec littéraux et factorisation, **pilotage du calcul (contrôle proactif)** pour avoir une forme connue d'équation différentielle (reconnaissance de la forme connue d'équation différentielle) avec les constantes suggérées par l'énoncé (contrat didactique : il faut les utiliser).

Pour la deuxième question

- **reconnaissance** des dimensions fondamentales des grandeurs physiques des deux membres de l'équation, reconnaissance des informations pertinentes données dans l'énoncé (constante de temps, C est une constante, unité de la gravité g donnée dans l'énoncé à partir de laquelle

l'étudiant doit déduire les dimensions fondamentales), traitement sur des dimensions fondamentales de grandeurs physiques
- **contrôle a posteriori (rétroactif)** (activité a maxima si l'étudiant identifie que l'équation n'est pas homogène)

g) Montrer que l'équation différentielle établie à la question a) a pour solution analytique : $v = A\exp(-t/\tau)+B$. Déterminer les valeurs littérales puis numériques des constantes A et B. Exprimer la solution en fonction de la vitesse limite de chute v_L.

Type de tâches 4 : Vérifier qu'une famille de fonctions données vérifie une équation différentielle donnée.
Technique : Calculer le membre de gauche de l'équation pour les fonctions de cette famille et montrer qu'il peut être égal au membre de droite.
Ici : On part de la forme donnée pour la solution $v = A\exp(-t/\tau)+B$. On calcule la dérivée de la vitesse v par rapport au temps t (type de tâches 5.1). On simplifie et on obtient $B/\tau = C$. La fonction $v = A\exp(-t/\tau)+C\tau$ est bien solution de l'équation $(dv/dt)+(v/\tau) = C$
Technologie : Si le membre de gauche de l'équation est égal au membre de droite, les fonctions qui réalisent l'égalité sont solution de l'équation.
Ici : la vitesse v est une fonction du temps t. On connaît la fonction exponentielle et sa dérivée. La fonction donnée vérifie bien l'équation différentielle, en choisissant la bonne valeur pour B.

Type de tâches 5 : Déterminer parmi les solutions d'une équation différentielle celle qui vérifie une condition donnée par le système physique.
Technique : On identifie une condition connue dans le système physique, et on l'utilise pour trouver la fonction qui convient.
Ici : On utilise la valeur de la vitesse pour t = 0 : la vitesse en t = 0 est nulle. On reporte dans la fonction : $0 = A\exp(-0/\tau)+C\tau = A+C\tau$. Donc $A = -C\tau$. On utilise les valeurs numériques trouvées en (f).
Technologie : L'état du système au temps initial est connu.
Ici : L'énoncé dit que la bille est lâchée « sans vitesse initiale », cela signifie que la vitesse initiale est nulle. Ceci permet de déterminer A, puisqu'on connaît la formule donnant la vitesse v et sa valeur en t = 0.

Type de tâches 6 : Déterminer les valeurs numériques entrant en jeu dans l'expression d'une fonction.
Technique : Les expressions littérales ont déjà été trouvées. Il suffit de faire le calcul numérique.

Type de tâches 7 : Transformer l'expression d'une vitesse pour l'exprimer en fonction de la vitesse limite.
Technique : Manipulation d'une expression algébrique.
Ici : A la question (d) on a vu que $v_L = C\tau$. On remplace dans l'expression de la vitesse v.

Remarques :
- On ne note pas v comme une fonction de t, même v(0) est noté v_0.
- On ne fait pas la résolution de l'équation différentielle, on vérifie seulement que, en choisissant la bonne valeur pour B, les fonctions de la famille donnée dans l'énoncé sont solutions. En mathématiques, on dirait « vérifier que pour une valeur de B bien choisie la fonction $v(t) = A\exp(-t/\tau)+B$ est solution de l'équation ».
- On donne l'expression numérique de la fonction, puis on cherche à nouveau une expression en fonction de paramètres.
- L'intérêt du type de tâches 7 est lié à l'interprétation : la vitesse est nulle au départ, elle augmente et tend vers une valeur limite. Cette interprétation n'est pas demandée dans l'énoncé. On ne revient pas non plus aux vecteurs, qui n'interviennent que dans la question (b).
- La forme de la question peut faire penser qu'à la différence des maths la solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 dépend de deux paramètres A et B

Analyses avec la TA

Connaissances mises en fonctionnement : substitution d'une solution dans une équation pour voir si elle la vérifie, dérivée de l'exponentielle, fonctions, connaissances directement liées aux mathématiques

Statut des connaissances : anciennes

Niveau de mise en fonctionnement : mobilisable

Adaptations des connaissances et activités :

- présence de paramètres qui complexifient les calculs (traitement complexe)
- pilotage du calcul (contrôle proactif) : C est connu c'est B qu'on peut trouver en fonction de C (ce n'est pas dans ce sens dans l'énoncé : A puis B)
- reconnaissance du rôle de la condition initiale pour trouver A (pilotage du calcul, à la charge de l'étudiant)
- calcul numérique (technique, complexité possible car les valeurs numériques sont décimales et en notation scientifique)
- utilisation de résultats antérieurs (vitesse limite), traitement sur la représentation littérale (manifestement le tube vertical n'a pas de fond puisque t peut tendre vers l'infini avec une vitesse limite strictement positive)