Énoncé

Chute d'une bille dans un liquide

Une bille en verre (masse volumique μ, rayon r) est lâchée, sans vitesse initiale, à la surface d'un tube vertical contenant de l'huile de ricin (masse volumique μ_o).
On donne : r = 1 mm ; μ = 2600 kg / m^3 ; μ_o = 970 kg / m³ ; g = 9,81 $m.s^{-2}$.

a) Exprimer, en fonction de l'intensité de la pesanteur terrestre g, du rayon r de la bille et des masses volumiques μ et μ_o, le poids P et la poussée d'Archimède Π exercée par le liquide sur la bille.

b) Établir l'équation différentielle du mouvement de la bille sachant que, dans le domaine de vitesse étudié, la force de frottement fluide peut s'écrire sous la forme : $\vec{F}=-6\pi\eta r\vec{v}$
(relation de Stokes, valable lorsque la vitesse reste faible)
η est le coefficient de viscosité du liquide
$\vec{v}$ est le vecteur vitesse de la bille en translation rectiligne
r est le rayon de la bille
On pose : $\tau=\frac{2\mu r^2}{9\eta}$ la constante de temps du système et $C=(1-\frac{\mu_O}{\mu})g$ une constante.
Vérifier l'homogénéité de l'équation différentielle.

c) Déterminer, en fonction g, μ et μ_o, l'accélération initiale de la bille. Calculer sa valeur numérique.

d) Déterminer, en fonction g, μ, μ_o, r et η, la vitesse limite de la bille.

e) Calculer numériquement le coefficient de viscosité η de l'huile de ricin sachant que la vitesse limite de la bille est v_L = 0,71 $mm.s^{-1}$.

f) Déterminer les unités de τ et C. Calculer leur valeur numérique.

g) Montrer que l'équation différentielle établie à la question b) a pour solution analytique : $v=A\exp(-t/\tau)+B$. Déterminer les valeurs littérales puis numériques des constantes A et B. Exprimer la solution en fonction de la vitesse limite de chute v_L.

Correction

Chute d'une bille dans un liquide

a) Exprimons, en fonction de l'intensité de la pesanteur terrestre g, du rayon r de la bille et des masses volumiques μ et μ_o, le poids P et la poussée d'Archimède Π.
Son poids s'exprime sous la forme P = m g.

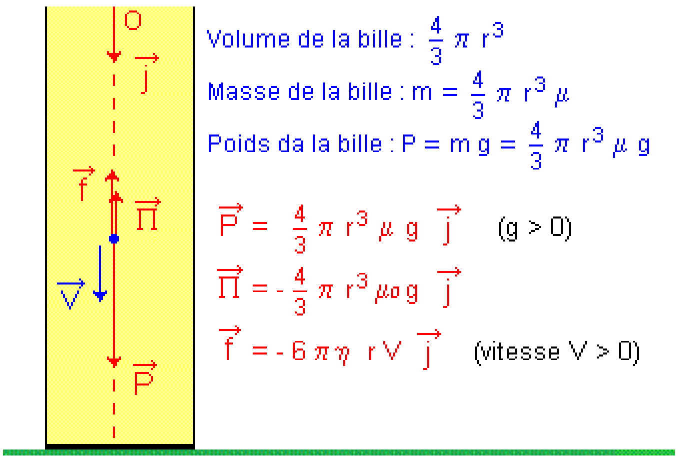
La masse de la bille est m = V μ avec le volume de la bille : $V=\frac{4}{3}\pi r^3$

Donc $P=\frac{4}{3}\pi r^3 \mu g$

La poussée d'Archimède Π exercée par le liquide sur la bille est égale au poids du liquide déplacé par la bille : $\Pi = v\, \mu_o\, g$

D'où : $\Pi=\frac{4}{3}\pi r^3 \mu_O g$

b) Établissons l'équation différentielle du mouvement de la bille sachant que, dans le domaine de vitesse étudié, la force de frottement fluide peut s'écrire sous la forme : $\vec{F}=-6\pi\eta r\vec{v}$ (relation de Stokes, valable lorsque la vitesse reste faible)



Référentiel Galiléen : le solide Terre. On lui associe le repère (O, $\vec{j}$).
Système étudié : la bille
Forces extérieures s'exerçant sur la bille :

- Le poids $\vec{P}$, essentiellement dû à l'action gravitationnelle de la Terre sur la bille
- La poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$ exercée par le liquide sur la bille
- La force de frottement fluide $\vec{F}=-6\pi\eta r\vec{v}=-6\pi\eta r v\vec{j}$

Appliquons la deuxième loi de Newton :
Dans un référentiel Galiléen, la somme des forces extérieures appliquées à un solide est égale au produit de la masse m du solide par l'accélération $\vec{a_G}$ de son centre d'inertie : $\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}+...=m\vec{a_G}$
Ici, ce théorème s'écrit : $\vec{P}+\vec{\Pi}+\vec{f}=m\vec{a}$
Utilisons les expressions :

- $\vec{P}=\frac{4}{3}\pi r^3 \mu g\vec{j}$
- $\vec{\Pi}=-\frac{4}{3}\pi r^3 \mu_O g\vec{j}$ (g > 0)
- $\vec{F}=-6\pi\eta r v\vec{j}$ (v varie mais reste > 0)

Il vient, avec $\vec{a}=\frac{dv}{dt}\vec{j}$: $\frac{4}{3}\pi r^3 \mu g\vec{j}-\frac{4}{3}\pi r^3 \mu_O g\vec{j}-6\pi\eta r v\vec{j}=m\frac{dv}{dt}\vec{j}$

Soit : $\frac{4}{3}\pi r^3(\mu-\mu_O)g-6\pi\eta r v=m\frac{dv}{dt}$

Introduisons la masse de la bille $m=V\mu=\frac{4}{3}\pi r^3\mu$

$$\frac{4}{3}\pi r^3(\mu-\mu_O)g-6\pi\eta r v=\frac{4}{3}\pi r^3\mu\frac{dv}{dt}$$

$$(\mu-\mu_O)\frac{g}{\mu}-\frac{9}{2}\frac{\eta}{\mu r^2}v=\frac{dv}{dt}$$

Soit, en plaçant le terme constant dans le second membre : $\frac{dv}{dt}+\frac{9}{2}\frac{\eta}{\mu r^2}v=(1-\frac{\mu_O}{\mu})g$

Finalement : $\frac{dv}{dt}+\frac{v}{\tau}=C$ avec $\tau=\frac{2\mu r^2}{9\eta}$ et $C=(1-\frac{\mu_O}{\mu})g$

<u>Homogénéité de l'équation différentielle :</u>

[dv/dt] = [v] / [t] = $L.T^{-2}$

[v] = $L.T^{-1}$

[τ] = T

Donc [v] / [τ] = $L.T^{-1}.T^{-1}$ = $L.T^{-2}$.

[C] = [g] = [v] / [t] = $L.T^{-1}.T^{-1}$ = $L.T^{-2}$.

L'équation est donc homogène.

c) Déterminons, en fonction g, μ et μo, l'accélération initiale de la bille.

A l'instant du départ t = 0 s, l'énoncé dit que la vitesse est nulle.

Portons dans l'équation différentielle : $\frac{dv}{dt}+\frac{v}{\tau}=C$

On obtient : $(\frac{dv}{dt})_0+\frac{v_0}{\tau}=C$ avec v_0 = 0 m.s^{-1}. Donc : $(\frac{dv}{dt})_0=C=(1-\frac{\mu_O}{\mu})g$

Numériquement on a : $(\frac{dv}{dt})_0=(1-\frac{970}{2600})\times 9{,}81=(1-0{,}37)\times 9{,}81=0{,}63\times 9{,}81=6{,}18\,m.s^{-2}$

d) Initialement nulle, la force de frottement $\vec{f}$ augmente proportionnellement à la vitesse. Le moment vient où le poids $\vec{P}$ est compensé par la somme des deux forces résistantes $\vec{\Pi}+\vec{f}_L$ où $\vec{f}_L$ est la force de frottement limite pour laquelle la vitesse de la bille est constante et par conséquent l'accélération est nulle. La somme des forces est alors nulle et, d'après la deuxième loi de Newton : $\vec{P}+\vec{\Pi}+\vec{f}_L=m\vec{a}_L$ avec $\vec{a}_L=\vec{0}$

La relation $\frac{dv}{dt}+\frac{v}{\tau}=C$ devient $(\frac{dv}{dt})_L+\frac{v_L}{\tau}=C$ avec $(\frac{dv}{dt})_L=0$ m.s^{-2}.

Finalement : $v_L=C\tau=(1-\frac{\mu_O}{\mu})g\frac{2\mu r^2}{9\eta}=\frac{2gr^2(\mu-\mu_0)}{9\eta}$

e) La relation $v_L=\frac{2gr^2(\mu-\mu_0)}{9\eta}$ peut aussi s'écrire : $\eta=\frac{2gr^2(\mu-\mu_0)}{9v_L}$

Numériquement :

$$\eta=\frac{2\times 9{,}81\times 10^{-6}\times(2600-970)}{9\times 0{,}71.10^{-3}}=\frac{19{,}62\times 10^{-6}\times 1630}{6{,}39.10^{-3}}=5005.10^{-3}=5{,}005\,SI\ ou\ Pa.s$$

f) D'après b : [C] = $L.T^{-2}$ et [τ] = T. L'unité de C est donc $m.s^{-2}$. L'unité de τ est donc s (seconde). Calcul des valeurs numériques de C et τ :

$C=(1-\frac{\mu_O}{\mu})g=6{,}18\,m.s^{-2}$ (voir question c)

$\tau=\frac{2\mu r^2}{9\eta}=\frac{2\times 2600\times 10^{-6}}{9\times 5{,}005}=\frac{5{,}2.10^3\times 10^{-6}}{4{,}5.10^2}=115{,}44.10^{-5}=1{,}15.10^{-4}\,s$

g) Vérifions que la solution analytique de l'équation différentielle $\frac{dv}{dt}+\frac{v}{\tau}=C$ est de la forme : $v=A\exp(-t/\tau)+B$. Calculons la dérivée, par rapport au temps t, de $v=A\exp(-t/\tau)+B$. $\frac{dv}{dt}=-\frac{A}{\tau}\exp(-t/\tau)$. Portons $\frac{dv}{dt}=-\frac{A}{\tau}\exp(-t/\tau)$ et $v=A\exp(-t/\tau)+B$ dans : $\frac{dv}{dt}+\frac{v}{\tau}=C$.

On obtient : $-\frac{A}{\tau}\exp(-t/\tau)+\frac{A\exp(-t/\tau)+B}{\tau}=C$. Soit : $\frac{B}{\tau}=C$

La fonction $v=A\exp(-t/\tau)+B$ est bien solution de $\frac{dv}{dt}+\frac{v}{\tau}=C$ si $B=C\tau$

La fonction $v=A\exp(-t/\tau)+C\tau$ est solution analytique de $\frac{dv}{dt}+\frac{v}{\tau}=C$

La valeur de la constante A dépend des conditions initiales. Ici, pour t = 0 s on doit avoir v_0 = 0 $m.s^{-1}$.

Portons dans $v=A\exp(-t/\tau)+C\tau$: $v_0=0=A\exp(-0/\tau)+C\tau$ avec $\exp(-0/\tau)=1$

Donc : $A+C\tau=0$. D'où : $A=-C\tau$

Finalement la solution analytique s'écrit : $v=-C\tau\exp(-t/\tau)+C\tau$

Finalement : $v=C\tau(1-\exp(-t/\tau))$

Déterminons les valeurs numériques des constantes A et B. On a vu que : $A=-C\tau$ et $B=C\tau$. A la question c, nous avons vu que : $(\frac{dv}{dt})_0=C=6{,}18\,m.s^{-2}$. A la question f, nous avons vu que : $\tau=1{,}15.10^{-4}\,s$.

Donc : $A=-B=-C\tau=-6{,}18\times 1{,}15.10^{-4}=7{,}11.10^{-4}\,m.s^{-1}$

En tenant compte des conditions initiales (vitesse nulle lorsque t = 0 s) la solution analytique de $\frac{dv}{dt}+\frac{v}{\tau}=C$ est : $v=C\tau(1-\exp(-t/\tau))$. Soit, en exprimant numériquement les constantes C et τ : $v=7{,}11.10^{-4}(1-\exp(-t/1{,}15.10^{-4}))$

Dans la question d, nous avons vu que v_L = C τ. Par conséquent la solution de l'équation différentielle $\frac{dv}{dt}+\frac{v}{\tau}=C$ s'écrit en fonction de la vitesse limite : $v=v_L(1-\exp(-t/\tau))$. Quand t tend vers 0 la vitesse est bien nulle. Quand t tend vers l'infini, alors la vitesse est égale à la vitesse limite.