Régions dans un disque
Analyse mathématique

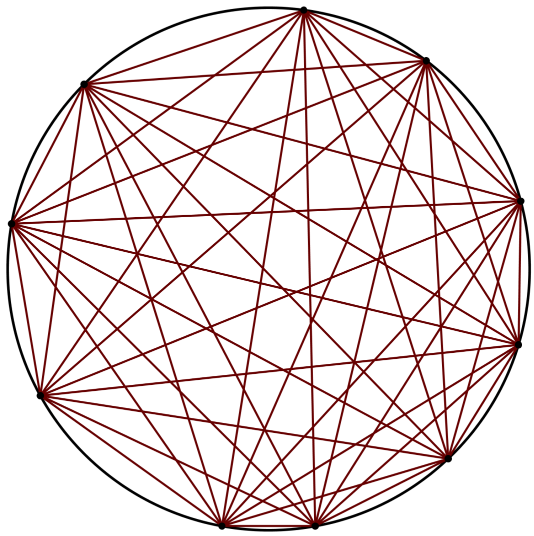
Équipe DREAM

12 juillet 2020

Table des matières

1 L'énoncé du problème

Combien y a-t-il de régions déterminées dans un disque par toutes les cordes joignant des points deux à deux ?



2 Solution(s), piste(s) de solution(s)

La recherche des régions déterminées par les cordes joignant deux points, trois points, quatre points semble conduire à la conjecture suivante : le nombre maximal de régions déterminées dans un disque par toutes les cordes joignant n points sur le cercle est 2^{n-1}.
Il faut attendre le cas $n = 6$ pour que cette conjecture soit mise en défaut.
On trouve alors 31 régions, ce qui détruit la conjecture faite précédemment.
Pour autant, il n'est pas facile de faire une autre conjecture avec le tableau de valeurs suivant :

n	2	3	4	5	6
Nombre de régions	2	4	8	16	31

Il faut alors chercher une méthode qui permette d'expliquer ce « drôle » de résultat pour le cas $n = 6$.
Notons que seules les quatre premières méthodes ci-après constituent une démonstration du résultat. Les deux dernières permettent de trouver le résultat, mais sans justification intrinsèque.

2.1 Première méthode

Elle est très « proche de l'action ». Le décompte des régions se fait en « se déplaçant » d'un point à un autre du cercle, et en comptant le nombre d'arêtes rencontrées...
Au départ, il y a un point sur le cercle et une seule région : le disque entier.
En rajoutant un point, on rajoute une arête qui elle-même rajoute une région.
Pour deux points, on a donc 1 arête et 2 régions.
En rajoutant un point, on peut construire 3 arêtes, c'est à dire le nombre de combinaisons de 2 parmi 3 ; chaque arête rajoutant une région, il y en a donc $1 + 3 = 4$.
A cette étape, un raisonnement commence à se construire : compter les régions revient à compter les arêtes, c'est à dire les combinaisons de 2 parmi n points.

Cependant, l'étape suivante ($n = 4$) montre l'insuffisance de ce raisonnement liée à l'intersection possible des arêtes : chaque fois que deux arêtes se coupent, il y a une région de plus : il suffit alors de noter qu'il y a autant de points d'intersection d'arêtes que de quadrilatères, c'est à dire de combinaisons de 4 parmi n, ce qui permet d'obtenir la formule générale :

$$R(n) = 1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}$$

2.2 Deuxième méthode

Elle utilise les graphes planaires, et permet d'obtenir la solution d'une façon élégante une fois que l'on a compris la modélisation de la situation par le bon graphe. Le nombre de régions cherché est le nombre de faces de ce graphe planaire. On détermine le nombre de sommets, celui des arêtes, et enfin celui des faces à l'aide de la formule d'Euler.
On peut voir cette situation comme le dénombrement des faces d'un graphe planaire dont on pourrait calculer le nombre d'arêtes et de sommets ; pour rendre la figure du disque comme représentation d'un graphe planaire, il est nécessaire d'ajouter des sommets à chaque point d'intersection des arêtes construites.
Le nombre de sommets est : $n + \binom{n}{4}$.

Le nombre d'arêtes est : $n + \binom{n}{2} + 2\binom{n}{4}$.

Et, en utilisant la formule d'Euler ($F = A - S + 2$, où F représente le nombre de faces, A le nombre d'arêtes et S le nombre de sommets), on obtient le résultat suivant :

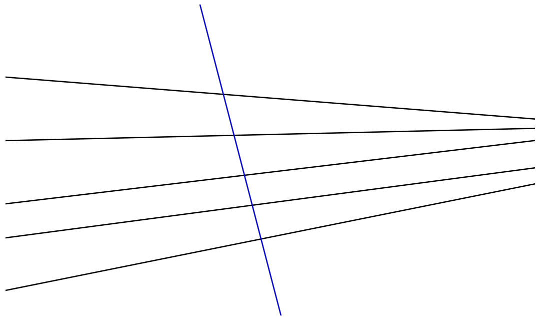
$$F = 1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}$$

2.3 Troisième méthode

Elle utilise un « théorème fondamental » sur le nombre de régions rajoutées lorsque qu'une droite coupe k droites. Elle recherche ensuite le nombre de régions $P(n+1)$ ajoutées lorsqu'on ajoute un $n + 1^{\text{eme}}$ point. Pour cela, on considère le point $A_{\text{n+1}}$ et l'on calcule le nombre de régions rajoutées en traçant la corde $[A_{\text{n+1}}A_{\text{j}}]$, il suffit ensuite de sommer de $j = 1$ à $j = n$ pour obtenir $P(n+1)$. Si on note $R(n)$ le nombre de régions pour n points sur le cercle, on a :

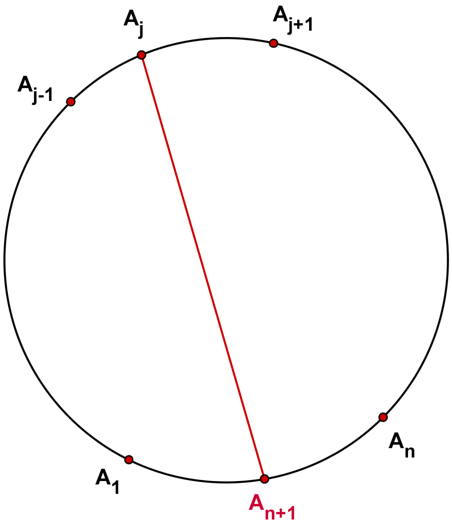
$$P(n+1) = R(n+1) - R(n)$$

$$\text{donc : } R(n) = R(2) + P(3) + ... + P(n) = 2 + P(3) + ... + P(n)$$



Théorème fondamental :

Une droite qui coupe k droites rajoute au plus $k+1$ régions. Voir le dessin ci-contre pour s'en convaincre.



Il faut ensuite calculer $R(n)$ le nombre de régions avec n points. Auparavant, on va calculer $P(n+1)$, le nombre de régions ajoutées lorsqu'on ajoute un $n+1^{\text{eme}}$ point $A_{\text{n+1}}$.

- La corde $[A_jA_{n+1}]$ coupe $(j-1)\times(n-j)$ cordes au maximum, donc « rajoute » $(j-1)\times(n-j)+1$ régions au maximum.
- Il y a n cordes partant de A_{n+1}, donc le nombre de régions ajoutées à $R(n)$ pour obtenir $R(n+1)$ est :

$$P(n+1)=\sum_{j=1}^{j=n}((j-1)\times(n-j)+1)$$

Comme $P(n+1)=R(n+1)-R(n)$, on obtient :

$$R(n)=2+P(3)+P(4)+...+P(n+1)$$

Les calculs donnent :

$$P(n+1)=\frac{n^3}{6}-\frac{n^2}{2}+\frac{4}{3}n$$

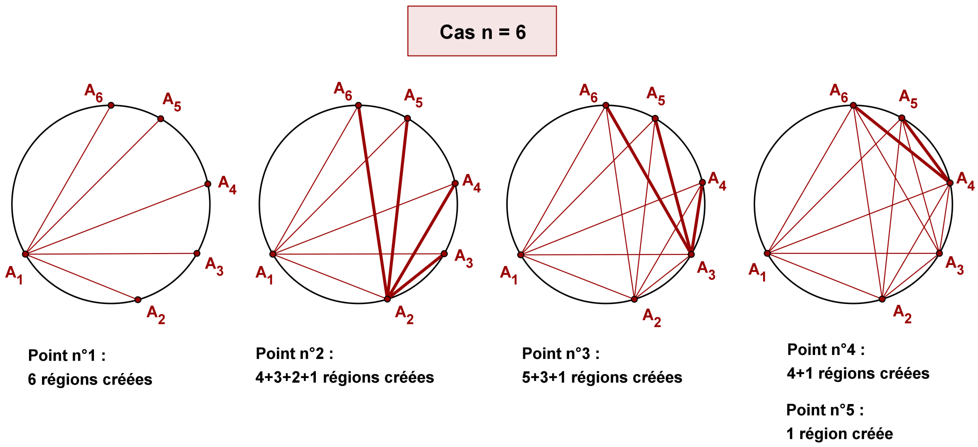
puis :

$$R(n)=\frac{n^4}{24}-\frac{n^3}{4}+\frac{23}{24}n^2-\frac{3}{4}n+1$$

2.4 Quatrième méthode

Elle est plus difficile à expliquer dans le « cas général » mais en se basant sur les premiers cas, elle est possible à généraliser.
Elle consiste à chercher le nombre de parties nouvellement créées à chaque fois que l'on trace toutes les cordes issues d'un même point.
La formule obtenue est une double somme par rapport à deux indices.

Lemme 1 : Lorsqu'on joint le point A_i au point A_j sans couper de corde, on crée une nouvelle région.
Lemme 2 : Lorsqu'on trace une corde, chaque fois que l'on coupe une corde déjà tracée, on crée une nouvelle région.



Détaillons le comptage dans le cas particulier $n = 6$.
Au départ, on a une seule région :

- A_1 joint aux 5 autres sommets :
  à chaque nouvelle corde, une nouvelle région (lemme1) donc en tout 5 nouvelles régions.
- A_2 joint aux 4 sommets suivants :
  $[A_2A_3]$ ne rencontre pas de corde, donc 1 région créée (lemme1)
  $[A_2A_4]$ rencontre 1 corde, donc 2 régions créées (lemmes 1 et 2)
  $[A_2A_5]$ rencontre 2 cordes, donc 3 régions créées (lemmes 1 et 2)
  $[A_2A_6]$ rencontre 3 cordes, donc 4 régions créées (lemmes 1 et 2)
- A_3 joint aux 3 sommets suivants :
  $[A_3A_4]$ ne rencontre pas de corde : 1 région créée
  $[A_3A_5]$ rencontre deux cordes déjà tracées, $[A_1A_4]$ et $[A_2A_4]$, donc 3 régions créées
  $[A_3A_6]$ rencontre 4 cordes déjà tracées, $[A_1A_4]$, $[A_2A_4]$, $[A_1A_5]$ et $[A_2A_5]$, donc 5 régions créées.
- A_4 joint aux 2 sommets suivants :
  $[A_4A_5]$ ne rencontre pas de corde, donc 1 région créée
  $[A_4A_6]$ rencontre 3 cordes déjà tracées, $[A_1A_5]$, $[A_2A_5]$ et $[A_3A_5]$, donc 4 régions créées.
- A_5 joint au dernier point A_6 : 1 région créée (lemme 1)

Le nombre de régions pour 6 points sur le cercle est :

$$1+\sum_{k=0}^{k=4}1+\sum_{k=0}^{k=3}(k+1)+\sum_{k=0}^{k=2}(2k+1)+\sum_{k=0}^{k=1}(3k+1)+\sum_{k=0}^{k=0}(4k+1)$$

Dans le cas de n points sur le cercle.
Au départ, on a une seule région :

- A_1 joint aux $n-1$ autres sommets : en tout n nouvelles régions (lemme 1)
- A_2 joint aux $n-2$ sommets suivants :
  $[A_2A_3]$ ne rencontre pas de corde, donc 1 région créée (lemme1)
  $[A_2A_4]$ rencontre 1 corde, donc 2 régions créées (lemmes 1 et 2)
  $[A_2A_5]$ rencontre 2 cordes, donc 3 régions créées (lemmes 1 et 2)....
  $[A_2A_n]$ rencontre n-3 cordes, donc n-2 régions créées (lemmes 1 et 2)

- A_3 joint aux $n-3$ sommets suivants :
  $[A_3A_4]$ ne rencontre pas de corde : 1 région créée
  $[A_3A_5]$ rencontre deux cordes déjà tracées ($[A_1A_4]$ et $[A_2A_4]$), donc 3 régions créées
  $[A_3A_6]$ rencontre 4 cordes déjà tracées ($[A_1A_4]$, $[A_2A_4]$, $[A_1A_5]$ et $[A_2A_5]$) , donc 5 régions créées ...
  $[A_3A_p]$ rencontre $2\times(p-4)$cordes donc $2\times(p-4)+1$ régions créées....
  $[A_3A_n]$ rencontre $2\times(n-4)$ cordes donc $2\times(n-4)+1$ régions créées...
- A_j joint aux $n-j$ sommets suivants :
  $[A_jA_{j+1}]$ ne rencontre pas de corde : 1 région créée
  $[A_jA_{j+2}]$ rencontre $j-1$ cordes déjà tracées , donc j régions créées
  $[A_jA_p]$ rencontre $(j-1)\times(p-j-1)$ cordes déjà tracées , donc $(j-1)\times(p-j-1)+1$ régions créées ...
  $[A_jA_n]$ rencontre $(j-1)\times(n-j-1)$ cordes déjà tracées , donc $(j-1)\times(n-j-1)+1$ régions créées.

Le nombre de régions pour n points sur le cercle est :

$$1+\sum_{j=1}^{j=n-1}\left(\sum_{k=0}^{k=n-j-1}((j-1)k+1)\right)$$

Le calcul de cette double somme avec un logiciel de calcul formel donne :

$$R(n)=\frac{n^4}{24}-\frac{n^3}{4}+\frac{23}{24}n^2-\frac{3}{4}n+1$$

2.5 Cinquième méthode

Elle est basée sur la conjecture que la formule qui donne le nombre cherché est un polynôme (ceci n'est pas évident car les premiers cas orientent plutôt vers une exponentielle !).
On peut alors effectuer une recherche à l'aide des polynômes de Lagrange : on connaît les valeurs de la fonction polynôme pour $n = 2, 3, 4, 5, 6$.
Donc il suffit de calculer le polynôme de Lagrange qui prend ces valeurs.
On trouve un polynôme de degré 4.
On fait la conjecture que la fonction qui donne $R(n)$ en fonction de n est une fonction polynôme.
Ou bien : on démontre grâce aux polynômes de Lagrange que c'en est une.
On connaît les valeurs de la fonction R pour $n = 2, 3, 4, 5, 6$.
Donc il suffit de calculer les polynômes de Lagrange qui prennent ces valeurs. Le polynôme de Lagrange passant par les points (1 ;1), (2 ;2), (3 ;4), (4 ;8), (5 ;16) est :

$$P(X)=\frac{X^4}{24}-\frac{X^3}{4}+\frac{23}{24}X^2-\frac{3}{4}X+1$$

Il prend la valeur 31 pour $X = 6$.
Donc il coincide avec le polynôme de Lagrange passant par les points (1 ;1), (2 ;2), (3 ;4), (4 ;8), (5 ;16) et (6 ;31).
Si dans un problème d'approximation des polynômes de Lagrange successifs ont même degré et sont égaux, on peut raisonnablement penser que la fonction cherchée est une fonction polynôme, égale à ce polynôme de Lagrange.
Cette méthode permet de trouver rapidement « la formule » mais elle ne permet pas de comprendre la situation en pratiquant des dénombrements. De plus la justification de la « formule » ne peut-être faite qu'en utilisant les méthodes 1, 2, 3 ou 4.

2.6 Sixième méthode

Elle utilise des différences finies.
étant donné qu'on connaît le nombre de régions $R(n)$ pour 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 6 points, on peut calculer les différences finies des valeurs de la fonction R, puis itérer cette méthode : la fonction étant une fonction polynôme, ces différences finies vont être constantes à la dernière étape, ce qui permettra de « remonter » les calculs, et d'obtenir les valeurs suivantes de la fonction (sans avoir sa formule algébrique en fonction de n).

Les calculs sont faits ci-dessous :

2		4		8		16		31		**57**		**99**		**163**
	2		4		8		15		**26**		**42**		**64**	
		2		4		7		**11**		**16**		**22**		**29**
			2		3		**4**		**5**		**6**		**7**	
				1		**1**		**1**		**1**		**1**		**1**