Les nombres trapézoïdaux
Analyse Mathématique

Équipe DREAM

30 août 2020

Table des matières

1 L'énoncé du problème

Trouver tous les nombres entiers qui sont la somme de nombres entiers naturels consécutifs.

2 Solution(s), piste(s) de solution(s)

Elle utilise le résultat suivant :
Si n est un entier naturel, on note S_n la somme : $S_n = 1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
N étant un entier naturel, on cherche s'il existe deux entiers naturels a et n tels que :
$N = a + (a+1) + (a+2) + ... + (a+n-1)$
$N = S_{a+n-1} - S_{a-1}$
$N = \dfrac{(a+n-1)(a+n)}{2} - \dfrac{(a-1)a}{2}$
Soit $2N = (a+n)^2 - a - n - a^2 + a = n(2a+n-1)$.
On peut alors raisonner sur la parité de l'entier n :

- si n est pair : $2a+n-1$ est impair
- si n est impair : $2a+n-1$ est pair

Par conséquent, des deux entiers n et $2a+n-1$, l'un est pair et l'autre est impair :
leur produit étant égal à $2N$, cela entraîne que N possède un facteur premier impair : N n'est pas une puissance de 2.

Il reste à démontrer que **tout nombre N qui n'est pas une puissance de 2 peut s'écrire comme somme d'entiers consécutifs**. Pour cela, deux démonstrations sont possibles. La première reste dans le cadre des entiers naturels, la seconde s'accorde le droit d'utiliser les entiers relatifs (même s'ils disparaitront à la fin).

Première démonstration : $2N$ est donc le produit d'un nombre impair i par un nombre pair p.
$2N = ip$ et $2N = n(2a+n-1)$
Si : $i < p$, alors il suffit de poser : $n = i$ et $p = n(2a+n-1)$ soit : $a = \dfrac{p-i+1}{2}$
Si : $i > p$, alors il suffit de poser : $n = p$ et $i = n(2a+n-1)$ soit : $a = \dfrac{i-p+1}{2}$

La conjecture est ainsi correctement démontrée, et cette démonstration donne un procédé pratique pour déterminer a et n entiers naturels tels que : $N = a + (a+1) + (a+2) + ... + (a+n-1)$

Deuxième démonstration :

Lemme 1 *Soit i un nombre entier impair. Soit n un multiple de i. Alors n est la somme de i nombres entiers (relatifs !) consécutifs*

Démonstration Soit $n = i \times m$ un nombre entier naturel avec i impair. Alors $i = 2p+1$ avec p un entier positif et

$$\sum_{k=-p}^{p} m + k = (m-p)+(m-p+1)+\cdots+(m-1)+m+(m+1)+\cdots+(m+p) = m\times(2p+1) = m\times i = n$$

□ □

On remarque que les premiers termes de la somme peuvent être négatifs, mais ils seront « éliminés » en les ajoutant à leurs opposés. On obtiendra ainsi une somme de termes positifs dont le résultat sera n. Avant de rédiger la preuve, donnons un exemple qui sera plus parlant : $14 = 2 \times 7$ avec $7 = 2 \times 3 + 1$ donc

$$14 = \sum_{k=-3}^{3} 2 + k = -1 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 2 + 3 + 4 + 5$$

donc 14 est bien un nombre trapézoïdal.

Proposition 1 *Tout nombre entier qui n'est pas une puissance de 2 est un nombre trapézoïdal.*

Démonstration Soit n un nombre entier naturel qui ne soit pas une puissance de 2. D'après sa décomposition en facteurs premiers, il existe $i = 2p + 1$ impair et m tels que $n = i \times m$. Donc $n = \sum_{k=-p}^{p} m + k$.

- Si $p \leq m$ tous les termes de la somme sont positifs et le résultat est démontré.
- Si $p > m$ les termes $m - p$,$m - p - 1, \dots$,$m - (m - 1)$ sont négatifs. Comme la somme $\sum_{k=-p}^{p} m + k$ contient leurs opposés, on peut l'écrire comme $p - m$ termes consécutifs négatifs, puis 0, puis $p-m$ termes consécutifs positifs (les opposés) ; puis $2m$ termes consécutifs positifs.

$$\begin{aligned}
n &= \sum_{k=-p}^{p} m + k \\
&= \Big[(m + (-p)) + (m + (-p + 1) + \cdots + (m + (-m - 1)) + (m + (-m)) + (m - (m + 1)) \\
&\quad + \cdots + (m + (p - 2m))\Big] + (m + (p - 2m + 1)) \cdots + (m + p) \\
&= (m + (p - 2m + 1)) \cdots + (m + p)
\end{aligned}$$

□

Cette deuxième démonstration donne aussi un procédé pratique pour trouver les décompositions des nombres trapézoïdaux.