Résolution collaborative de problèmes
Nombre de régions dans un disque

Viviane DURAND-GUERRIER
(d'après le diaporama de Claire Tardy, groupe EXPRIME)

6 février 2010

Une première exploration du problème conduit à un premier constat : pour un nombre de points donnés sur le pourtour du disque, ce nombre dépend de la configuration des points sur le cercle ; en effet, si trois cordes ont un point commun, alors il y a moins de zones que si aucun point d'intersection n'est commun à trois cordes. Ceci conduit à modifier le problème en se posant la question du nombre maximum de zones que l'on peut ainsi obtenir, dont on fait l'hypothèse qu'il dépend de manière fonctionnelle du nombre de points sur le cercle, à condition que l'on élimine les cas où un point d'intersection est commun à trois cordes ou plus.
Ceci étant posé, le dénombrement sur les premiers dessins donne les résultats suivants

2 points	3 points	4 points	5 points	6 points
2 régions	4 régions	8 régions	16 régions	31 régions

Alors que les premiers dénombrements engagent vers la conjecture :
Le nombre maximum de régions déterminées dans un disque par toutes les cordes joignant n poins donnés sur le cercle est 2^{n-1}, le résultat obtenu avec 6 points conduit à la rejeter.

Cette première conjecture faite sur l'observation des premiers résultats numériques est donc mise en défaut par le dénombrement lui-même. On peut alors envisager plusieurs types de méthodes pour poursuivre la recherche :

1. Continuer à dénombrer en ajoutant un septième point, afin de voir si une nouvelle régularité se dégage.

2. Examiner la manière dont on passe d'une valeur à la valeur suivante en essayant de dégager si possible une relation de récurrence.
3. Essayer de mettre en place une méthode systématique de dénombrement et la traduire par une formule.
4. Faire des hypothèses sur la nature de la relation fonctionnelle cherchée et tester ces hypothèses à l'aide des valeurs déterminées par dénombrement (méthodes numériques).
5. Transformer le problème par changement de cadre.

La première méthode pour 7 conduit à 57 ; il est difficile d'aller au-delà, sauf à être très patient, très soigneux et très organisé. Ce résultat confirme que le résultat pour 6 n'est pas un accident (ni dû à une erreur dans le dénombrement) ; il faut bien renoncer à la conjecture initiale. Par contre, il est difficile de dégager une nouvelle régularité.

On peut alors passer à la méthode n°2 en regardant le passage de n à $n+1$

n	2	3	4	5	6	7
$R(n)$	2	4	8	16	31	57
$R(n+1)-R(n)$	/	2	4	8	15	26

Il apparaît difficile de faire une nouvelle conjecture à partir de ces seuls résultats numériques et le dénombrement « à la main » commence à devenir très délicat ! Ceci peut conduire à essayer de faire émerger la relation fonctionnelle cherchée avec un autre type de méthode.

Deux exemples de méthodes de type 3

Méthode 3.1. *Dénombrer sur un exemple jouant le rôle d'élément générique (au sens de Balacheff)*

On peut le faire par exemple avec six points ; on considère qu'on tourne dans le sens trigonométrique sur le cercle et on numérote les points de $A1$ à $A6$; on considère que chaque point d'intersection est commun à exactement deux cordes (sinon, on bouge un peu un point). On a au départ une région : le disque. Le point $A1$ joint les 5 autres points en créant 5 cordes et ajoute 5 régions. Ensuite, si on joint deux points consécutifs, on ajoute une région ; et chaque fois que l'on joint deux points en coupant n cordes, on ajoute $n+1$ régions. Le point $A2$ joint les 4 points restants. Avec le point le plus proche, cela crée une région, avec le suivant, il coupe une corde et crée 2 régions, puis il coupe 2 cordes et crée 3 régions et enfin, il coupe 3 cordes et crée 4 régions. Le point $A3$ joint les 3 points restants. Avec le point le plus proche $A4$, il crée une région. Avec le point $A5$, il coupe les deux cordes partant de $A4$ et crée donc 3 régions ; avec le point $A6$, il coupe les deux cordes issues de $A4$ et les deux cordes issues de $A6$, soit 4 cordes et crée donc 5 régions. Le point $A4$ joint les points $A5$ et $A6$. Avec $A5$, il crée une région ; avec $A6$, il coupe les 3 cordes issues de $A5$ et crée donc 4 régions. Le point $A5$ joint $A6$ en créant une région. On a donc au total :

$$1 + 5 + (1 + 2 + 3 + 4) + (1 + 3 + 5) + (1 + 4) + 1 = 31.$$

On retrouve bien le résultat prévu. On peut généraliser à un nombre $n > 6$

1. Le tracé des $(n-1)$ cordes à partir du premier point et la région initiale donne n régions
2. Le tracé des $(n-2)$ cordes à partir du deuxième point crée : $1 + 2 + 3 + ... + (n-2)$ régions, ou encore somme de $k = 0$ à $k =(n-3)$ de $(k+1)$
3. Le tracé des $(n-3)$ cordes suivantes crée $1 + 3 + 5 + \ldots + 2(n-4) + 1$
4. Le tracé des $(n-4)$ cordes suivantes crée $1 + 4 + 7 + \ldots + 3(n-5) + 1$ Et ainsi de suite
5. Le tracé des cordes à partir de $An-2$ crée $1 + (n-3) + 1$ régions
6. Le dernier tracé crée une région

On peut écrire cette somme sous la forme

$$1 + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1-j} ((j-1)k + 1) \right)$$

Ce calcul n'est pas très facile à conduire à la main ; il nécessite d'utiliser les formules donnant les sommes des puissances d'entiers d'exposant 1 à 3 ; on peut également le confier à un logiciel de calcul formel. On obtient :

$$R(n) = \frac{n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24}{24}$$

Méthode 3.2. *Dénombrer en s'intéressant aux configurations géométriques.*

On peut revenir tout d'abord sur la remarque faite plus haut qu'à partir du premier point, on crée autant de régions que de cordes tracées ; ce nombre est égal au nombre de tirages de 2 points parmi n :

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

On regarde ensuite ce qui se passe lorsque deux cordes se coupent : ces deux cordes sont associées à quatre points sur le cercle, et sous notre hypothèse qu'on considère des configurations où chaque point d'intersection appartient exactement à deux cordes, il y a autant de points d'intersection que de quadrilatères dont les sommets sont pris parmi les n points sur le cercle ; soit le nombre de combinaisons de 4 points parmi n :

$$\frac{n(n-1)(n-2-)(n-3)}{4!}$$

Le nombre maximum de régions déterminées par n points sur le cercle est donc égal à

$$R(n) = 1 + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$$

Cette formule produit bien les résultats trouvés par dénombrement sur les premiers cas. Elle est bien plus maniable que la précédente.

Cette fois, en outre, le calcul conduisant à une formule explicite est facile à faire ; on obtient de nouveau :

$$R(n) = \frac{n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24}{24}$$

On peut encore imaginer d'autres modes d'organisation du dénombrement permettant d'obtenir ce résultat.

Méthode 3.3. *Présentée dans Maths en Jeans 1994, 94 **131 **132 **découpage d'un cercle en régions ; lycée La Fontaine, Paris (très proche de 3.1. avec un calcul explicite)*
http ://mathenjeans.free.fr/amej/edition/actes/actespdf/actespdf.html

Un exemple de méthode de type 4

On utilise le polynôme d'interpolation de Lagrange pour approcher la fonction qui passe par les couples obtenus par dénombrement :

$$(1,1) : (2,2); (3,4); (4,8); (5;16); (6,31); (7,57)$$

Avec ces sept couples, on obtient le polynôme de degré 4

$$L(X) = \frac{X^4 - 6X^3 + 23X^2 - 18X + 24}{24}$$

Comme on a sept couples, on pourrait avoir un polynôme de degré 6. Comme on obtient un polynôme de degré 4, on peut faire la conjecture que la fonction cherchée est la fonction polynomiale associée. Cette méthode ne conduit cependant pas à une preuve de la conjecture. Rien ne nous prouve en effet que la fonction cherchée est polynomiale.

Remarque 1 : on peut aussi utiliser la méthode des différences finies, mais ici encore, elle ne peut pas fournir une preuve.

Remarque 2 : on a prouvé avec la méthode 3.2 que la fonction est polynomiale de degré 4 ; et bien sûr la fonction trouvée est celle associée au polynôme ci-dessus.

Un exemple de méthode de type 5

On peut se placer dans la théorie des graphes : voir diaporama en ligne : irem-fpb.univ-lyon1.fr/feuillesprobleme/feuille12/enonces/disque.pdf

Méthode des différences finies

Etant donné qu'on connaît le nombre de régions $R(n)$ pour 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 6 points, on peut calculer les différences finies des valeurs de la fonction R, puis itérer cette méthode. Sachant que la fonction est une fonction polynôme, ces différences finies vont être constantes à la dernière étape, ce qui permettra de « remonter » les calculs, et d'obtenir les valeurs suivantes de la fonction (sans avoir sa formule algébrique en fonction de n).

2		4		8		16		31		**57**		**99**		**163**
	2		4		8		15		**26**		**42**		**64**	
		2		4		7		**11**		**16**		**22**		**29**
			2		3		**4**		**5**		**6**		**7**	
				1		**1**		**1**		**1**		**1**		**1**

On retrouve ainsi une méthode du type 2.