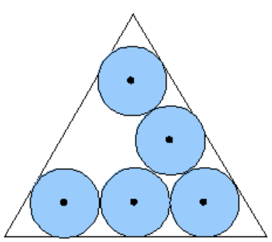
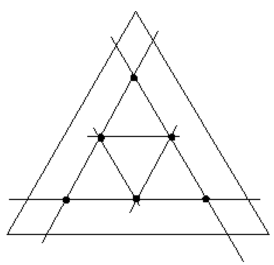
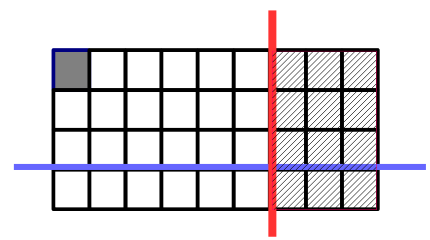
Jeux mathématiques et raisonnements combinatoires : une UE en Licence pour l'apprentissage des « savoir-faire fondamentaux » des mathématiques

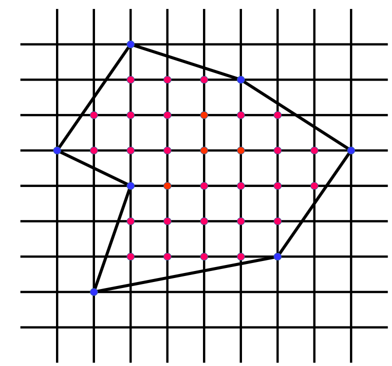
Denise Grenier et Rémi Molinier

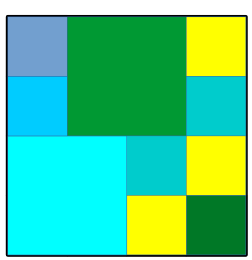
Maths discrètes et didactique, Institut Fourier
Équipe fédérative de recherche Math-à-modeler
IREM   université Grenoble-Alpes

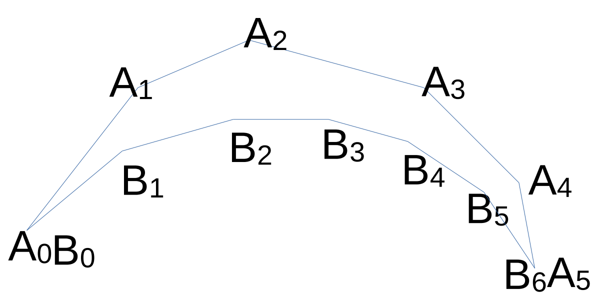


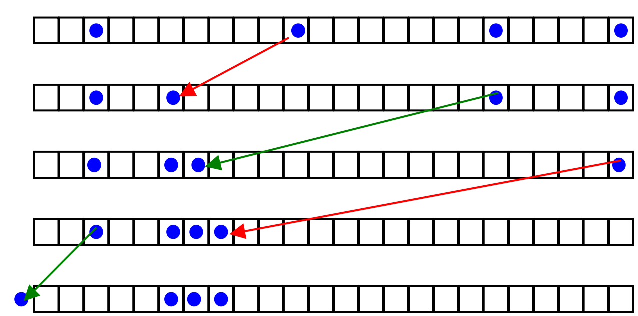












Pour un enseignement scientifique à l'université

Postulat Nécessité de faire pratiquer la démarche mathématique dès le L1

Objectif Construire les *savoir-faire fondamentaux* – savoirs, méthodes et techniques – qui sont à la base de toute activité mathématique :

expérimenter, étudier de cas particuliers,
faire des hypothèses, énoncer et étudier des conjectures,
construire des exemples, des contre-exemples,
représenter, modéliser, changer de registre,
raisonner, construire des preuves, définir des objets, …

Réalisation

Proposer des problèmes impliquant une vraie activité de recherche
Mettre en place un dispositif favorisant une *recherche collaborative*

Conditions pour la dévolution d'une vraie activité de recherche

Des problèmes spécifiques construits selon des critères précis en identifiant des *variables de recherche**
Une gestion en classe d'aide à la recherche *en adidactique*

* *Variable de recherche :* une variable didactique pouvant être mise à la disposition des élèves

Le modèle Situation de recherche pour la classe (SiRC)

Caractérisation (Grenier & Payan 1998, 2003)

- Question peu formalisée, accessible en *adidactique*, ludique
- Solution non évidente, non résolue par un théorème ou un résultat connu
- Au moins une stratégie initiale « immédiate » :

  essai/erreur, étude de cas particuliers, exemples, ...
- Codage, modélisation et changement de registres accessibles
- Activité de recherche permettant de formuler des conjectures et de les étudier
- Nouvelles questions ou généralisation possibles en lien avec le problème
- Mise en situation favorisant la recherche et sa formulation

Technologie et pratique des SiRC

Situations construites pour tous niveaux

Étudiées depuis 25 ans dans des travaux de recherche (thèses, mémoires, IREM)

→ analyses didactiques fiables

Situations intégrées dans des formations diverses (licences, masters, stages PAF)

et dans le cadre scolaire (primaire, collège, lycée, Math-à-modeler junior)

UE optionnelle « Jeux combinatoires et raisonnements mathématiques »

Enseignants/chercheurs impliqués dans l'UE

dès 1998 : Gravier, Grenier, Mollard, Payan   depuis 2017 : Sivignon, Molinier

Place dans les cursus

UE semestrielle   parcours multiples   3 ECTS

années 2000	DEUG 1	Un semestre – parcours Sciences 36 heures + 12 heures (encadrement des projets)
2007	L1 et L2	Un semestre – parcours Sciences 24 heures mini-mémoires en binômes
2019	L1 et L2	Deux semestres – Tous parcours UGA 24 heures mini-mémoires en binômes

Compétences visées et objectifs déclarés

« Mise en œuvre de son imagination et sa créativité
Apprentissage des savoir-faire fondamentaux de l'activité mathématique »

Contraintes institutionnelles des UE optionnelles

contenus pris dans un domaine absent des cursus universitaires
accessibles à tous les étudiants sans prérequis spécifiques

UE optionnelle « Jeux combinatoires et raisonnements mathématiques »

Dispositif pédagogique

Travaux en groupes

temps de recherche non fixé à l'avance (une ou plusieurs séances)
supports matériels divers
enseignant en position d'observateur et de chercheur (encadrement de la recherche)
prise de notes pour mémoire de la recherche et rédaction de preuves

Synthèses collectives

décidées en direct, selon le déroulement de la recherche
objectif : faire le point, relancer

Évaluation : tutorat et mini-mémoire écrit, présentation orale

liste de sujets, un choix par binôme, mini-mémoire encadré
travail et rédaction partagés en binômes
présenté lors d'une séance particulière – oral individuel

Objets de l'évaluation : l'apprentissage des savoir-faire fondamentaux

écrit du déroulement de la recherche, statut des propositions (hypothèse, vraie sur un exemple, cas particulier, etc..), conjectures argumentées, résultats prouvés

note finale = 1/3 [note de CC + 2 notes mémoire (texte écrit et présentation orale)]

évalue : travail en groupe, écrit en binôme et présentation orale individuelle.

Les maths discrètes : un domaine privélégié pour les SiRC

– Théories, objets, notions et outils non enseignés dans les cursus classiques

théorie des nombres, théorie des graphes, théorie des nœuds,
théories du langage et de l'information, théorie des jeux, complexité …

– Discrétisation du continu

– Modélisations et raisonnements spécifiques

Partition, pavage, empilement/ recouvrement (*covering, packing, tiling*)
Dénombrement, double comptage/bijection
Structuration : coloration, principe des « cages à pigeons » (Dirichlet)
Adjacence, coloration, invariant, stable
Décomposition/recomposition
Exhaustivité des cas, induction, récurrence, absurde
Modélisation (graphe)
Optimisation combinatoire
Jeux à stratégies gagnantes

Les maths discrètes pour l'enseignement

– Des problèmes « simples » à énoncer, faciles à expérimenter, conjectures accessibles, mais solutions générales non évidentes

(pavages, théorème des quatre couleurs, empilement optimal d'objets)

– Domaine favorisant la démarche de raisonnement et de preuve

– Outils de représentation et de modélisation efficaces

Exemple (thèse, Julien Rolland, 1999)

Quel est le nombre de façons de colorier n boules en au plus k couleurs ?

La réponse est $n+k-1$

On aurait donc additionné des boules et des couleurs puis soustrait « 1 » !

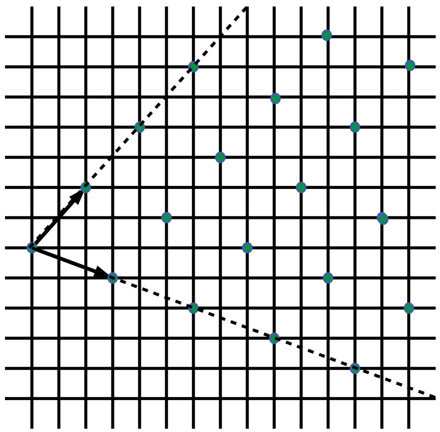
Une modélisation en mots comportant des 0 et des 1 permet de résoudre et de comprendre la réponse.

Exemples de problèmes relevant du modèle SiRC

Déplacements dans le plan discret (Ouvrier-Buffet, thèse, 2003)

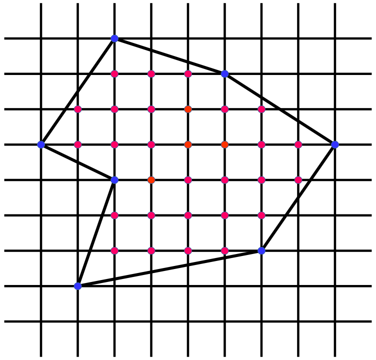
Déterminer des ensembles générateurs minimaux
de déplacements dans tout le plan discret

Où peut-on aller avec les deux déplacements élémentaires
d1 : (2D,2H) et d2 : (3D, 1B) ?

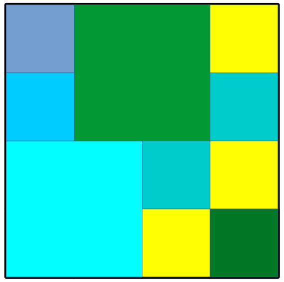


Aire d'un polygone à sommets entiers (Dissa, thèse, 2020)

Trouver une formule « simple » de calcul de
l'aire d'un polygone à sommets entiers



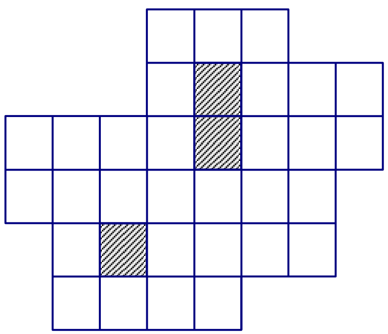
Pavage d'un carré en *n* carrés
(brochure SiRC, IREM de Grenoble, 2018)
Pour quelles valeurs de *n* peut-on paver un carré en *n* carrés ?

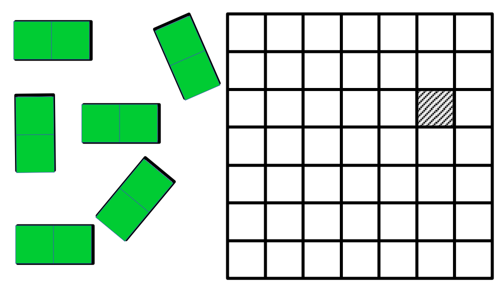


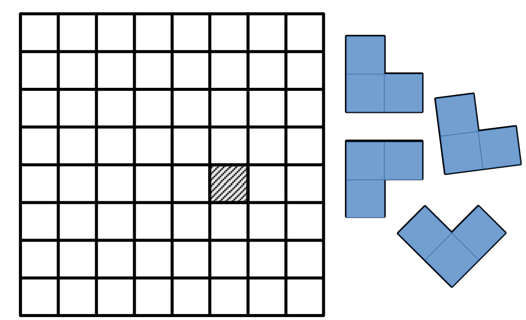
Pavages de polyminos : une *situation fondamentale*

Situation fondamentale **: ensemble de problèmes explorant un ou plusieurs concepts en étroite relation, comme objets et/ou outils de résolution,**

Question générale Q0. Étant donné un polymino, est-il pavable par un ensemble de polyminos identiques plus petits ?



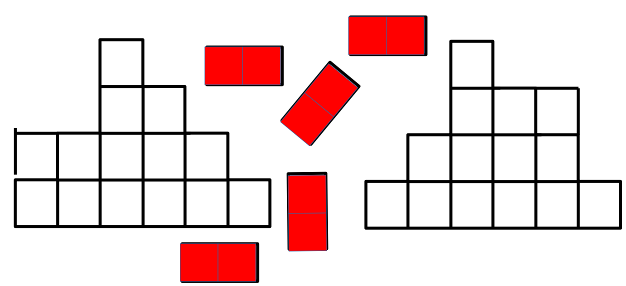




Trois problèmes

P1. Rectangle avec un trou quelconque / dominos

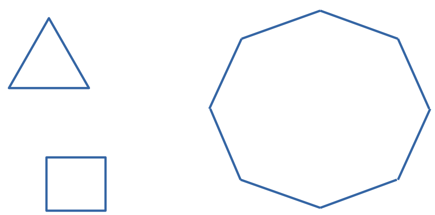
P2. Carré avec un trou quelconque / triminos en L

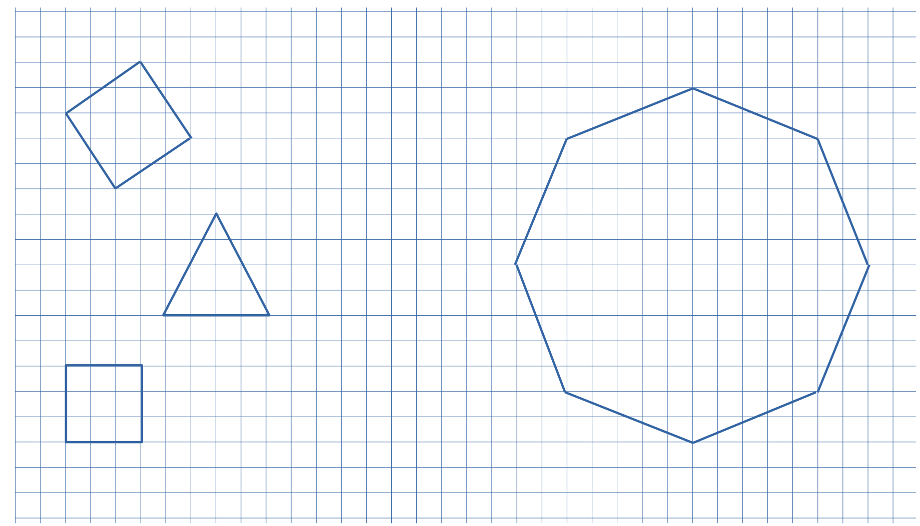


P3. Trapèze sans trou / dominos

n-polygones réguliers à sommets entiers

Problème. Pour quelles valeurs de *n* existe-t-il des *n*-polygnes réguliers dont tous les sommets sont sur une grille carrée régulière ?





Un raisonnement basé sur

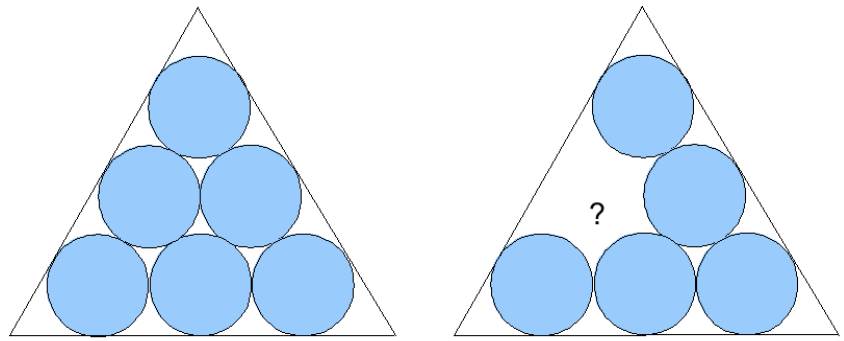
- l'axiome de Peano : « Il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante dans N »,
- la notion d'aire discrète pour un polygone quelconque
- et une transformation géométrique

permet de faire une preuve pour toutes les valeurs de $n>3$.

Une modélisation « discrète » efficace d'un problème de géométrie

Empilements de disques dans un triangle équilatéral minimal

On peut placer **six** disques de diamètre 1 dans le triangle équilatéral :



Est-il possible de placer ces six disques dans un **plus petit** ?
Est-il possible de placer **cinq** de ces disques dans un triangle plus petit ?

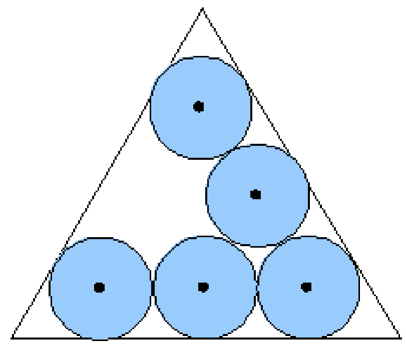
On peut répondre avec des outils de géométrie classiques pour n=6.

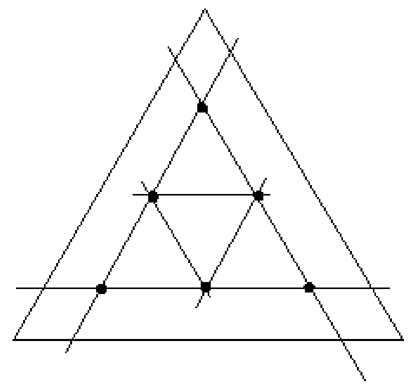
Et pour n=5 ?

Modèle discret : disques / points et distances minimales
Principe des cages à pigeons

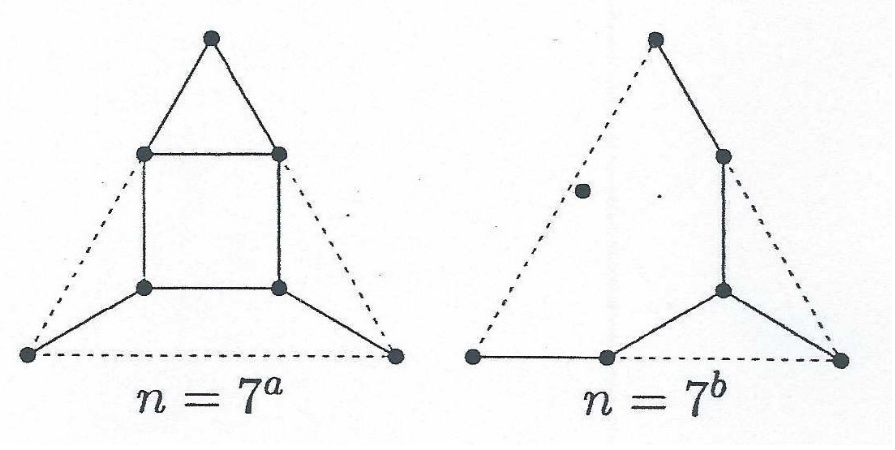
Approche discrète de problèmes géométriques
Modélisation et raisonnement spécifiques

Empilement optimal de *cinq* disques dans un triangle équilatéral





Pour n=7 : deux solutions optimales très différentes



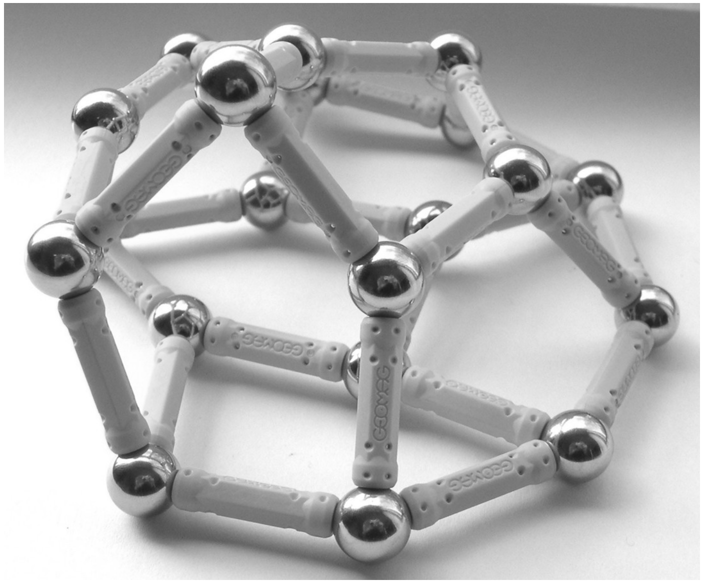
s

Atelier SiRC   Une question de géométrie euclidienne

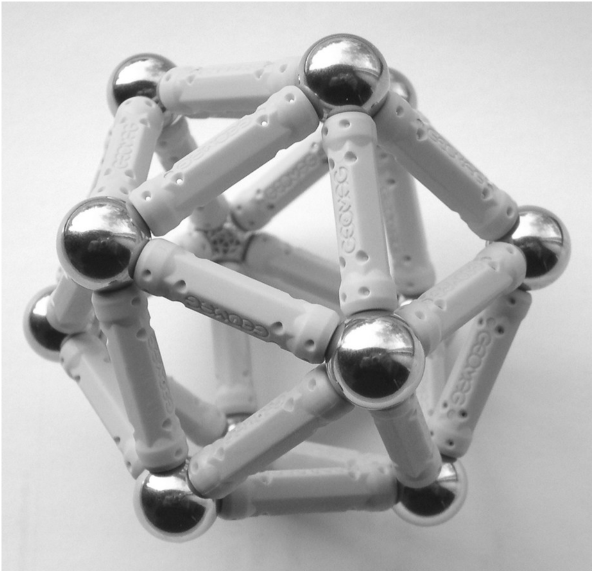
La question : trouver tous les polyèdres convexes réguliers dans R^3

Définition
Construction
Conjecture
Preuve

Construction des polyèdres par type de face et degré des sommets
La construction s’arrête par saturation des sommets. Deux exemples.



Faces pentagonales
Degré des sommets : 3
Dodécaèdre



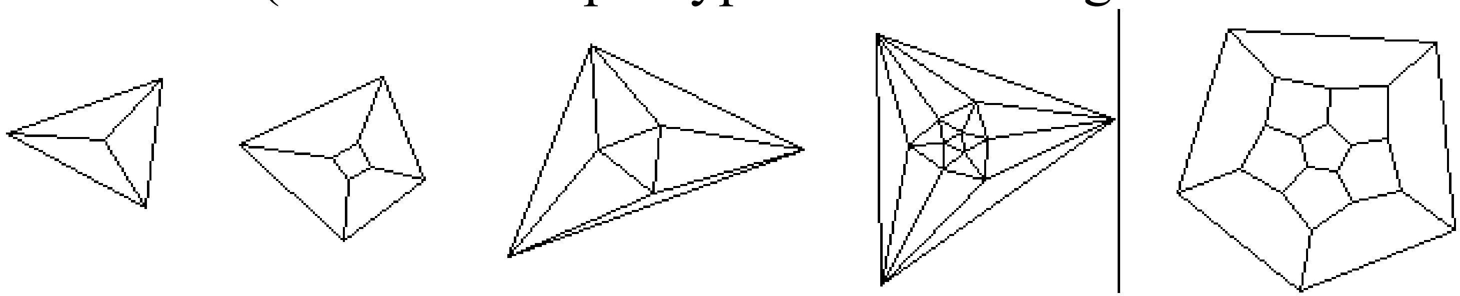
Faces triangulaires
Degré des sommets : 4
Icosaèdre

Pour prouver qu’il n’y en a pas plus que que cinq, on peut représenter de manière univoque tout polygone convexe sur un plan, par une projection stéréographique à partir d’un pôle (ne contenant pas un des sommets). On obtient un graphe planaire.

Polyèdres convexes réguliers dans R^3

Théorème. Il n'y a (pas plus) que cinq polyèdres réguliers dans R^3

Preuve utilisant une modélisation en graphe planaire (diagrammes de Schlegel) de polyèdres candidats (construction par type de face et degré des sommets)



Dans cette modélisation discrète :

→ On « oublie » les valeurs des angles (dièdres, polygonaux) et les longueurs des côtés

→ On utilise la relation d'Euler dans les graphes planaires : $s-a+f=2$ (sommets, arêtes, faces)

→ On en déduit une inéquation dans $\mathbb{N}^2$ reliant p= nombre de côtés d'une face et q=degré des sommets $(p-2)(q-2)<4$ (p,q) symbole de Schläfli

→ On établit que cette inéquation n'admet que cinq solutions

→ On vérifie ensuite géométriquement l'existence des cinq polyèdres associés.

Exemples de SiRC qui ont fait leur preuve

Pavages de polyminos / *algorithmes, théorèmes d'existence, récurrence* / coloration de graphes de grille (Grenier et Payan 1998, Deloustal-Jorrand, thèse Institut Fourier 2004, Grenier 2007 &2008)

Promenades dans une grille / *algorithmes, théorèmes d'existence* / chemin hamiltonien, coloration (in http://mathsamodeler.ujf-grenoble.fr/LAVALISE/)

Dénombrements (mots, chemins, etc) / *modélisation, bijection* / analyse combinatoire (in http://mathsamodeler.ujf-grenoble.fr/LAVALISE/)

La chasse à la bête / *optimisation dans N* / intervalles d'entiers, borne sup, borne inf (Duchêne, thèse en maths discrètes 2006, Grenier CERME8, 2012)

La roue aux couleurs / *modélisation, bijection* / arithmétique, nombres premiers, permutations (Godot, thèse Institut Fourier, 2005)

Objets géométriques discrets / *représentation (pixels), définition* / géométrie euclidienne (Ouvrier-Buffet, thèse Institut Fourier, 2003)

Déplacements dans le plan discret / *définition* / systèmes générateurs, minimaux, algèbre linéaire (Ouvrier-Buffet, thèse Institut Fourier, 2003)

Chemins eulériens, hamiltoniens / définition, modélisation/ graphes (Cartier, thèse Institut Fourier, 2008)

Polyèdres réguliers de l'espace / *définition, construction et preuve* / géométrie de l'espace, graphes planaires (Grenier et Tanguay, 2008 & 2010)

Exemples de SiRC (suite)

Les gardiens de musée / *optimisation* / triangulation d'un polygone, coloration (Groupe SiRC, IREM de Grenoble)

Polyèdres réguliers de l'espace / *définition, construction et preuve* / géométrie de l'espace, graphes planaires (Grenier et Tanguay, 2008 & 2010)

Polygones réguliers à sommets entiers / *récurrence, absurde* / géométrie combinatoire (Grenier et Payan, 1998)

Disques dans triangles ou carrés / *optimisation* / géométrie combinatoire, graphe (Grenier et Payan, 1998)

Partage d'un carré en *n* carrés / *induction* / suites, congruences, dénombrement, géométrie (Groupe SiRC, site de l'IREM de Grenoble, rapport activités 2012)

Jeu des carrés dans un rectangle / jeu à deux joueurs, *stratégies, position gagnante* / algorithme d'Euclide (Colipan, thèse Institut Fourier, 2014)

Jeu de SET/ *démarche expérimentale*/ dénombrements, permutations (Giroud, thèse, Institut Fourier, 2011)

Jeu de la frontière / *stratégie gagnante, absurde* / convexité (Giroud, thèse, Institut Fourier, 2011)

Aire d'un polygone à sommets entiers / *modélisation, récurrence* / plan discret, aire discrète (Dissa, thèse, UGA, 2020)

Thèses contenant des études de SiRC (Université Joseph Fourier et UGA)

Julien ROLLAND (1999) *Pertinence des mathématiques discrètes pour l'apprentissage de la modélisation et de l'implication.*

Cécile OUVRIER-BUFFET (2003) *Construction de définitions / construction de concept : vers une situation fondamentale pour la construction de définition en mathématiques.*

Virginie DELOUSTAL-JORRAND (2004) *Étude épistémologique et didactique de l'implication en mathématique.*

Karine GODOT (2005) *Situations de recherche et jeux mathématiques pour la formation et la vulgarisation.*

Léa CARTIER (2008) *Le graphe comme outil pour enseigner la preuve et la modélisation.*

Michèle GANDIT (2008) *Étude épistémologique et didactique de la preuve en mathématiques et de son enseignement. Une ingénierie de formation.*

Nicolas GIROUD (2011) *Étude de la démarche expérimentale dans les Situations de recherche pour la classe.*

Ximena COLIPAN (2014) *Étude de SiRC basées sur des jeux combinatoires particuliers : les jeux de type Nim.*

Sinaly DISSA (2020) *Entre arithmétique et géométrie, une étude épistémologique et didactique autour du théorème de Bezout et du théorème de Pick.* UGA

Mickaël Da RONCH (en cours, 2022) *Conception d'une ingénierie pour le développement du raisonnement et du processus de preuve en mathématiques : le cas du problème de Wang*. UGA