

# La démonstration : principes et pratiques.

Catriona Maclean

6 avril 2022

## La démonstration en mathématiques

Sociologie et histoire de la démonstration.

Problèmes sociologiques.

Problèmes pédagogiques, retour sur expérience.

Retour sur expérience

# Définition

Forme de **raisonnement**

# Définition

Forme de **raisonnement**

- ▶ Uniquement **analytique**

# Définition

Forme de **raisonnement**

- ▶ Uniquement **analytique**
- ▶ Raisonement par **analogie** interdit

# Définition

Forme de **raisonnement**

- ▶ Uniquement **analytique**
- ▶ Raisonement par **analogie** interdit
- ▶ Raisonement par **observation** également.

# Définition

Forme de **raisonnement**

- ▶ Uniquement **analytique**
- ▶ Raisonement par **analogie** interdit
- ▶ Raisonement par **observation** également.

Réputé débiter avec les Eléments d'Euclide vers 300 BCE.

# Le raisonnement analytique

”Minecraft” intellectuel



# Le raisonnement analytique

"Minecraft" intellectuel

- ▶ un certain nombre de "blocs de base" appelés "axiomes"

# Le raisonnement analytique

"Minecraft" intellectuel

- ▶ un certain nombre de "blocs de base" appelés "axiomes"
- ▶ règles de combinaison simples (calcul des prédicats)

# Le raisonnement analytique

## "Minecraft" intellectuel

- ▶ un certain nombre de "blocs de base" appelés "axiomes"
- ▶ règles de combinaison simples (calcul des prédicats)
- ▶ + des millénaires : résultat très complexe.

# En principe...

\*54·43.  $\vdash \therefore \alpha, \beta \in 1. \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda. \equiv . \alpha \cup \beta \in 2$

*Dem.*

$\vdash . *54·26. \supset \vdash \therefore \alpha = t'x. \beta = t'y. \supset : \alpha \cup \beta \in 2. \equiv . x \neq y.$

[\*51·231]  $\equiv . t'x \cap t'y = \Lambda.$

[\*13·12]  $\equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda$  (1)

$\vdash . (1). *11·11·35. \supset$

$\vdash \therefore (\exists x, y). \alpha = t'x. \beta = t'y. \supset : \alpha \cup \beta \in 2. \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda$  (2)

$\vdash . (2). *11·54. *52·1. \supset \vdash . \text{Prop}$

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that  $1 + 1 = 2$ .

# En principe...

\*54·43.  $\vdash \therefore \alpha, \beta \in 1. \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda. \equiv . \alpha \cup \beta \in 2$

*Dem.*

$\vdash . *54\cdot26. \supset \vdash \therefore \alpha = t'x. \beta = t'y. \supset : \alpha \cup \beta \in 2. \equiv . x \neq y.$

[\*51·231]  $\equiv . t'x \cap t'y = \Lambda.$

[\*13·12]  $\equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda$  (1)

$\vdash . (1). *11\cdot11\cdot35. \supset$

$\vdash \therefore (\exists x, y). \alpha = t'x. \beta = t'y. \supset : \alpha \cup \beta \in 2. \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda$  (2)

$\vdash . (2). *11\cdot54. *52\cdot1. \supset \vdash . \text{Prop}$

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that  $1 + 1 = 2$ .

## Démonstration (incomplète) de $1+1=2$

# En principe...

\*54·43.  $\vdash \therefore \alpha, \beta \in 1. \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda. \equiv . \alpha \cup \beta \in 2$

*Dem.*

$\vdash . *54\cdot26. \supset \vdash \therefore \alpha = t'x. \beta = t'y. \supset : \alpha \cup \beta \in 2. \equiv . x \neq y.$

[\*51·231]  $\equiv . t'x \cap t'y = \Lambda.$

[\*13·12]  $\equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda$  (1)

$\vdash . (1). *11\cdot11\cdot35. \supset$

$\vdash \therefore (\exists x, y). \alpha = t'x. \beta = t'y. \supset : \alpha \cup \beta \in 2. \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda$  (2)

$\vdash . (2). *11\cdot54. *52\cdot1. \supset \vdash . \text{Prop}$

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that  $1 + 1 = 2$ .

Démonstration (incomplète) de  $1+1=2$  (Principes Mathématiques de Bertrand Russell).

## Rôle définissant...

- ▶ Première réaction : qualité définissant communauté

## Rôle définissant...

- ▶ Première réaction : qualité définissant communauté
- ▶ Notamment le cas au CNU.



ou pas...

Distinction entre *production* et *procéssus*

ou pas...

Distinction entre *production* et *procédus*

- ▶ la *production* doit être formelle

ou pas...

Distinction entre *production* et *processus*

- ▶ la *production* doit être formelle
- ▶ dans le *processus* sur valorisation de la "génie" .

ou pas...

Distinction entre *production* et *procéssus*

- ▶ la *production* doit être formelle
- ▶ dans le *processus* sur valorisation de la "génie" .

Cantor "In re mathematica ars proponendi quaestionem pluris facienda est quam solvendi" .

# Hermite sur Poincaré

"Souvent Picard lui a demandé, sur des points d'une grande importance dans ses articles des Comptes Rendus, des éclaircissements et des explications, sans pouvoir jamais rien obtenir qu'une affirmation: "c'est ainsi, c'est comme cela", de sorte qu'il semble comme un voyant auquel apparaissent les vérités dans une vive lumière, mais en grande partie pour lui seulement."

# Hardy sur Ramanujan

"For my part, it is difficult to say what I owe to Ramanujan - his originality has been a constant source of suggestion to me ever since I knew him."

# Hardy sur Ramanujan

"For my part, it is difficult to say what I owe to Ramanujan - his originality has been a constant source of suggestion to me ever since I knew him."

(Un certain nombre des "rêves" de Ramanujan était faux

# Hardy sur Ramanujan

"For my part, it is difficult to say what I owe to Ramanujan - his originality has been a constant source of suggestion to me ever since I knew him."

(Un certain nombre des "rêves" de Ramanujan était faux cadre de Hardy permet à son talent de s'exprimer)



# Réputations des anciens

Mathématiciens célèbres qui ont publié des démonstrations (plus ou moins) fausses

# Réputations des anciens

Mathématiciens célèbres qui ont publié des démonstrations (plus ou moins) fausses

- ▶ Euclide (nombreuses assumptions cachées dans les éléments)

# Réputations des anciens

Mathématiciens célèbres qui ont publié des démonstrations (plus ou moins) fausses

- ▶ Euclide (nombreuses assumptions cachées dans les éléments)
- ▶ Kepler (arguments loufouques médiévistes)

# Réputations des anciens

Mathématiciens célèbres qui ont publié des démonstrations (plus ou moins) fausses

- ▶ Euclide (nombreuses assumptions cachées dans les éléments)
- ▶ Kepler (arguments loufouques médiévistes)  
" Pourquoi 6 planètes ? Parce qu'il faut 6 voix pour faire une chorale" .

# Réputations des anciens

Mathématiciens célèbres qui ont publié des démonstrations (plus ou moins) fausses

- ▶ Euclide (nombreuses assumptions cachées dans les éléments)
- ▶ Kepler (arguments loufouques médiévistes)  
" Pourquoi 6 planètes ? Parce qu'il faut 6 voix pour faire une chorale".
- ▶ Leibniz (utilisation d'infinitesimals)

# Reputations des modernes

- ▶ Euler (démonstration fausse du théorème de l'algèbre)

# Reputations des modernes

- ▶ Euler (démonstration fausse du théorème de l'algèbre)
- ▶ Lagrange (opposition Fourier, toute fonction développable en série)

# Reputations des modernes

- ▶ Euler (démonstration fausse du théorème de l'algèbre)
- ▶ Lagrange (opposition Fourier, toute fonction développable en série)
- ▶ Cauchy (limite de fonctions continues est continue),



# Reputations des modernes

- ▶ Euler (démonstration fausse du théorème de l'algèbre)
- ▶ Lagrange (opposition Fourier, toute fonction développable en série)
- ▶ Cauchy (limite de fonctions continues est continue),
- ▶ Poincaré (mémoire pour le prix royal Suède)

# Reputations des modernes

- ▶ Euler (démonstration fausse du théorème de l'algèbre)
- ▶ Lagrange (opposition Fourier, toute fonction développable en série)
- ▶ Cauchy (limite de fonctions continues est continue),
- ▶ Poincaré (mémoire pour le prix royal Suède - erreur découverte après impression).

# Pourtant nécessaire

Exemple : école italienne de la géométrie algébrique.

# Pourtant nécessaire

Exemple : école italienne de la géométrie algébrique.

- ▶ absence de fondations suffisantes

# Pourtant nécessaire

Exemple : école italienne de la géométrie algébrique.

- ▶ absence de fondations suffisantes notamment pour les intersections,

# Pourtant nécessaire

Exemple : école italienne de la géométrie algébrique.

- ▶ absence de fondations suffisantes notamment pour les intersections,
- ▶ principe " passage à la limite" sans fondation

# Pourtant nécessaire

Exemple : école italienne de la géométrie algébrique.

- ▶ absence de fondations suffisantes notamment pour les intersections,
- ▶ principe " passage à la limite" sans fondation
- ▶ Dérive sociologique

# Pourtant nécessaire

Exemple : école italienne de la géométrie algébrique.

- ▶ absence de fondations suffisantes notamment pour les intersections,
- ▶ principe " passage à la limite" sans fondation
- ▶ Dérive sociologique "gourou" n'admettant pas la contradiction (Severi)



# Pourtant nécessaire

Exemple : école italienne de la géométrie algébrique.

- ▶ absence de fondations suffisantes notamment pour les intersections,
- ▶ principe " passage à la limite" sans fondation
- ▶ Dérive sociologique "gourou" n'admettant pas la contradiction (Severi)
- ▶ effondrement de l'école vers 1950.

# Pourtant nécessaire

Exemple : école italienne de la géométrie algébrique.

- ▶ absence de fondations suffisantes notamment pour les intersections,
- ▶ principe " passage à la limite" sans fondation
- ▶ Dérive sociologique "gourou" n'admettant pas la contradiction (Severi)
- ▶ effondrement de l'école vers 1950.

# L'importance du groupe social

- ▶ Calcul des prédicats inutilisable en pratique

# L'importance du groupe social

- ▶ Calcul des prédicats inutilisable en pratique
- ▶ On approche par le langage naturel

# L'importance du groupe social

- ▶ Calcul des prédicats inutilisable en pratique
- ▶ On approche par le langage naturel
- ▶ Quel degré d'approximation autorisée ?

# L'importance du groupe social

- ▶ Calcul des prédicats inutilisable en pratique
- ▶ On approche par le langage naturel
- ▶ Quel degré d'approximation autorisée ?
- ▶ Consensus *social*

# L'importance du groupe social

- ▶ Calcul des prédicats inutilisable en pratique
- ▶ On approche par le langage naturel
- ▶ Quel degré d'approximation autorisée ?
- ▶ Consensus *social*

Différences nationales en particulier.

# Premier écart

La méthode axiomatique est souvent réputée débiter avec les  
Eléments d'Euclide...



# Premier écart

La méthode axiomatique est souvent réputée débiter avec les  
Eléments d'Euclide...  
et la première erreur se trouve dans la ligne 4 de la proposition 1.

# Avant premier écart

Même la définition d'un point pose problème

# Avant premier écart

Même la définition d'un point pose problème  
Selon Euclide c'est "ce qui n'a aucune partie"

# Sincérité de la littérature

- ▶ Les mathématiciens se trompent...

# Sincérité de la littérature

- ▶ Les mathématiciens se trompent...
- ▶ Comment s'assurer de la sincérité de la littérature ?

# Sincérité de la littérature

- ▶ Les mathématiciens se trompent...
- ▶ Comment s'assurer de la sincérité de la littérature ?
- ▶ forte inter-dépendance

# Sincérité de la littérature

- ▶ Les mathématiciens se trompent...
- ▶ Comment s'assurer de la sincérité de la littérature ?
- ▶ forte inter-dépendance
- ▶ peu de contrôle

# Sincérité de la littérature

- ▶ Les mathématiciens se trompent...
- ▶ Comment s'assurer de la sincérité de la littérature ?
- ▶ forte inter-dépendance
- ▶ peu de contrôle



# Potentiel d'effondrement.

- ▶ Ecole de géométrie algébrique italienne,

# Potentiel d'effondrement.

- ▶ Ecole de géométrie algébrique italienne,
- ▶ Bourbaki et le calcul intégral/différentiel,

# Potentiel d'effondrement.

- ▶ Ecole de géométrie algébrique italienne,
- ▶ Bourbaki et le calcul intégral/différentiel,
- ▶ Théorie des catégories fin 20ième/début 21ième siècle

# Etude de cas : théorie des catégories/groupoïdes/homotopie

- ▶ 1984 : circulation d'un texte "Esquisse d'un programme" de Groethendieck

# Etude de cas : théorie des catégories/groupoïdes/homotopie

- ▶ 1984 : circulation d'un texte "Esquisse d'un programme" de Groethendieck
- ▶ 1986 : publication de Algebraic Cycles and Higher K-theory de Spencer Bloch.

# Etude de cas : théorie des catégories/groupoïdes/homotopie

- ▶ 1984 : circulation d'un texte "Esquisse d'un programme" de Groethendieck
- ▶ 1986 : publication de Algebraic Cycles and Higher K-theory de Spencer Bloch. Censé établir les fondations de la cohomologie des motifs.

# Etude de cas : théorie des catégories/groupoïdes/homotopie

- ▶ 1984 : circulation d'un texte "Esquisse d'un programme" de Groethendieck
- ▶ 1986 : publication de Algebraic Cycles and Higher K-theory de Spencer Bloch. Censé établir les fondations de la cohomologie des motifs.
- ▶ 1989 : publication de "∞-Groupoids as a Model for a Homotopy Category" de Voevodsky et Kapranov,

# Etude de cas : théorie des catégories/groupoïdes/homotopie

- ▶ 1984 : circulation d'un texte "Esquisse d'un programme" de Groethendieck
- ▶ 1986 : publication de Algebraic Cycles and Higher K-theory de Spencer Bloch. Censé établir les fondations de la cohomologie des motifs.
- ▶ 1989 : publication de "∞-Groupoids as a Model for a Homotopy Category" de Voevodsky et Kapranov, censé établir les fondations des groupoïdes sur la base du programme de Groethendieck.



# Le diable commence à s'en mêler

- ▶ Peu de temps après publication : erreur dans "Algebraic Cycles and Higher K-theory."

# Le diable commence à s'en mêler

- ▶ Peu de temps après publication : erreur dans "Algebraic Cycles and Higher K-theory."
- ▶ Rien du papier ne survit.

# Le diable commence à s'en mêler

- ▶ Peu de temps après publication : erreur dans "Algebraic Cycles and Higher K-theory."
- ▶ Rien du papier ne survit.
- ▶ Voevodsky : construction alternative en 1993,

## Le diable commence à s'en mêler

- ▶ Peu de temps après publication : erreur dans "Algebraic Cycles and Higher K-theory."
- ▶ Rien du papier ne survit.
- ▶ Voevodsky : construction alternative en 1993, "Cohomological Theory of Presheaves with Transfers".

## Le diable commence à s'en mêler

- ▶ Peu de temps après publication : erreur dans "Algebraic Cycles and Higher K-theory."
- ▶ Rien du papier ne survit.
- ▶ Voevodsky : construction alternative en 1993, "Cohomological Theory of Presheaves with Transfers".
- ▶ 1989-1999 nombreux groupes de mathématiciens travaillent sur la base des deux papiers de Voevodsky et Kapranov.

## Le diable commence à s'en mêler

- ▶ Peu de temps après publication : erreur dans "Algebraic Cycles and Higher K-theory."
- ▶ Rien du papier ne survit.
- ▶ Voevodsky : construction alternative en 1993, "Cohomological Theory of Presheaves with Transfers".
- ▶ 1989-1999 nombreux groupes de mathématiciens travaillent sur la base des deux papiers de Voevodsky et Kapranov.
- ▶ 2002 Médaille Fields de Voevodsky.

# On frle l'effondrement

- ▶ 1998 Preprint arxiv de Simpson, proposant un contre exemple au papier de 1989.

# On frle l'effondrement

- ▶ 1998 Preprint arxiv de Simpson, proposant un contre exemple au papier de 1989. Débat dans la communauté.



## On frle l'effondrement

- ▶ 1998 Preprint arxiv de Simpson, proposant un contre exemple au papier de 1989. Débat dans la communauté.
- ▶ 1999-2000 Voevodsky découvre une erreur dans "Cohomological Theory of Presheaves with Transfers".

# On frle l'effondrement

- ▶ 1998 Preprint arxiv de Simpson, proposant un contre exemple au papier de 1989. Débat dans la communauté.
- ▶ 1999-2000 Voevodsky découvre une erreur dans "Cohomological Theory of Presheaves with Transfers".
- ▶ Dix ans de travail communautaire mis en danger.

# On frle l'effondrement

- ▶ 1998 Preprint arxiv de Simpson, proposant un contre exemple au papier de 1989. Débat dans la communauté.
- ▶ 1999-2000 Voevodsky découvre une erreur dans "Cohomological Theory of Presheaves with Transfers".
- ▶ Dix ans de travail communautaire mis en danger.
- ▶ Aucun des groupes n'a vu le problème.

# On recule de l'abys

- ▶ 2006 publication d'un lemme correctif de "Cohomological Theory"

## On recule de l'abys

- ▶ 2006 publication d'un lemme correctif de "Cohomological Theory"
- ▶ 2013 Débat sur preprint tranché en faveur de Simpson

# On recule de l'abys

- ▶ 2006 publication d'un lemme correctif de "Cohomological Theory"
- ▶ 2013 Débat sur preprint tranché en faveur de Simpson
- ▶ Voevodsky abandonne son travail sur les motifs en faveur des *fondements univalents*.

# Fondements univalents

Voevodsky s'est convaincu de la nécessité de **démonstrations vérifiables** par ordinateur.

# Fondements univalents

Voevodsky s'est convaincu de la nécessité de **démonstrations vérifiables** par ordinateur.

- ▶ Problème : l'ordinateur lit la logique formel.



# Fondements univalents

Voevodsky s'est convaincu de la nécessité de **démonstrations vérifiables** par ordinateur.

- ▶ Problème : l'ordinateur lit la logique formel.
- ▶ ce qui ne fait personne.

# Fondements univalents

Voevodsky s'est convaincu de la nécessité de **démonstrations vérifiables** par ordinateur.

- ▶ Problème : l'ordinateur lit la logique formel.
- ▶ ce qui ne fait personne.
- ▶ Impraticable avec le calcul des prédicats.

# Fondements univalents

Voevodsky s'est convaincu de la nécessité de **démonstrations vérifiables** par ordinateur.

- ▶ Problème : l'ordinateur lit la logique formel.
- ▶ ce qui ne fait personne.
- ▶ Impraticable avec le calcul des prédicats.
- ▶ Fondements univalents : langage de logique formel alternatif

# Fondements univalents

Voevodsky s'est convaincu de la nécessité de **démonstrations vérifiables** par ordinateur.

- ▶ Problème : l'ordinateur lit la logique formel.
- ▶ ce qui ne fait personne.
- ▶ Impraticable avec le calcul des prédicats.
- ▶ Fondements univalents : langage de logique formel alternatif
- ▶ But : rendre faisable l'écriture formelle.

# Avoir la foi

- ▶ Plus possible de maitriser tout ce qui sous tend un article.

# Avoir la foi

- ▶ Plus possible de maîtriser tout ce qui sous tend un article.
- ▶ Taux de publication d'arxiv : 16,000 par mois.

# Avoir la foi

- ▶ Plus possible de maîtriser tout ce qui sous tend un article.
- ▶ Taux de publication d'arxiv : 16,000 par mois.
- ▶ 12 articles dans mon domaine hier (géométrie algébrique)

# Avoir la foi

- ▶ Plus possible de maîtriser tout ce qui sous tend un article.
- ▶ Taux de publication d'arxiv : 16,000 par mois.
- ▶ 12 articles dans mon domaine hier (géométrie algébrique)
- ▶ dont 5 potentiellement pertinent à moi



# Un exemple

Citation d'un de mes articles

## Un exemple

Citation d'un de mes articles

"After blowing up, we obtain a birational morphism  $\pi^{\text{sm}} : X^{\text{sm}} \rightarrow X$  from a smooth variety,  $X^{\text{sm}}$ , to  $X$ . "

# Un exemple

Citation d'un de mes articles

"After blowing up, we obtain a birational morphism  $\pi^{\text{sm}} : X^{\text{sm}} \rightarrow X$  from a smooth variety,  $X^{\text{sm}}$ , to  $X$ ."

Résultat de Hironaka, années 60, 100 pages.

# Un exemple

Citation d'un de mes articles

"After blowing up, we obtain a birational morphism  $\pi^{\text{sm}} : X^{\text{sm}} \rightarrow X$  from a smooth variety,  $X^{\text{sm}}$ , to  $X$ . "

Résultat de Hironaka, années 60, 100 pages.

Potentiel de propagation des erreurs.

## Un exemple

Citation d'un de mes articles

"After blowing up, we obtain a birational morphism  $\pi^{\text{sm}} : X^{\text{sm}} \rightarrow X$  from a smooth variety,  $X^{\text{sm}}$ , to  $X$ ."

Résultat de Hironaka, années 60, 100 pages.

Potential de propagation des erreurs.

Système de rapportage insuffisant.

# Robustesse procédure

Les procédures de vérification peu robustes.

# Robustesse procédure

Les procédures de vérification peu robustes.

- ▶ souvent un seul vérificateur

# Robustesse procédure

Les procédures de vérification peu robustes.

- ▶ souvent un seul vérificateur
- ▶ pas de vérification "n+1"



# Robustesse procédure

Les procédures de vérification peu robustes.

- ▶ souvent un seul vérificateur
- ▶ pas de vérification "n+1"
- ▶ pression à bâcler la vérification

# Robustesse procédure

Les procédures de vérification peu robustes.

- ▶ souvent un seul vérificateur
- ▶ pas de vérification "n+1"
- ▶ pression à bâcler la vérification
- ▶ aucune pression à bien faire.

# Robustesse procédure

Les procédures de vérification peu robustes.

- ▶ souvent un seul vérificateur
- ▶ pas de vérification "n+1"
- ▶ pression à bâcler la vérification
- ▶ aucune pression à bien faire.

Erreurs trouvées au moment de l'utilisation.

# Incitations institutionnelle

Le travail de rapporteur est

- ▶ très chronophage si bien fait

# Incitations institutionnelle

Le travail de rapporteur est

- ▶ très chronophage si bien fait
- ▶ pas reconnu.

# Problème du crédit

- ▶ Le système fonctionne sur le crédit des rapporteurs

# Problème du crédit

- ▶ Le système fonctionne sur le crédit des rapporteurs et des auteurs

# Problème du crédit

- ▶ Le système fonctionne sur le crédit des rapporteurs et des auteurs
- ▶ Comme cette crédibilité est elle construite ?



# Problème du crédit

- ▶ Le système fonctionne sur le crédit des rapporteurs et des auteurs
- ▶ Comme cette crédibilité est elle construite ?
- ▶ Est ce qu'elle est justifiée ?

# Problème du crédit

- ▶ Le système fonctionne sur le crédit des rapporteurs et des auteurs
- ▶ Comme cette crédibilité est elle construite ?
- ▶ Est ce qu'elle est justifiée ?

Contribution à la situation de Voevodsky.

# L'avis de l'intéressé

Voevodsky sur les problèmes de ses papiers :

## L'avis de l'intéressé

Voevodsky sur les problèmes de ses papiers :

"A technical argument by a trusted author, which is hard to check and looks similar to arguments known to be correct, is hardly ever checked in detail."

## L'avis de l'intéressé

Voevodsky sur les problèmes de ses papiers :

"A technical argument by a trusted author, which is hard to check and looks similar to arguments known to be correct, is hardly ever checked in detail."

Voevodsky sur le fait qu'il a fallu 14 ans pour que la communauté accepte le contre exemple de Carlos Simpson

## L'avis de l'intéressé

Voevodsky sur les problèmes de ses papiers :

"A technical argument by a trusted author, which is hard to check and looks similar to arguments known to be correct, is hardly ever checked in detail."

Voevodsky sur le fait qu'il a fallu 14 ans pour que la communauté accepte le contre exemple de Carlos Simpson

"Mathematical research currently relies on a complex system of mutual trust based on reputations. By the time Simpson's paper appeared, both Kapranov and I had strong reputations. Simpson's paper created doubts in our result, which led to it being unused by other researchers, but no one came forward and challenged us on it."

# Preuves longues

Certains résultats majeurs ont des démonstrations trop longues pour une vérification "à la main" fiable

# Preuves longues

Certains résultats majeurs ont des démonstrations trop longues pour une vérification "à la main" fiable

- ▶ problème de Kepler (250 pages, plusieurs Gigabytes de code)



# Preuves longues

Certains résultats majeurs ont des démonstrations trop longues pour une vérification "à la main" fiable

- ▶ problème de Kepler (250 pages, plusieurs Gigabytes de code)
- ▶ classification des groupes finis simples (10,000 pages au total)

# Preuves longues

Certains résultats majeurs ont des démonstrations trop longues pour une vérification "à la main" fiable

- ▶ problème de Kepler (250 pages, plusieurs Gigabytes de code)
- ▶ classification des groupes finis simples (10,000 pages au total)
- ▶ Eléments de géométrie algébrique. (non publié en format article)

# Preuves longues

Certains résultats majeurs ont des démonstrations trop longues pour une vérification "à la main" fiable

- ▶ problème de Kepler (250 pages, plusieurs Gigabytes de code)
- ▶ classification des groupes finis simples (10,000 pages au total)
- ▶ Eléments de géométrie algébrique. (non publié en format article)

Que faire ?

# Un cas de figure : la démonstration de la conjecture de Kepler

- ▶ Conjecture de Kepler (1611) - densité optimale des oranges.

# Un cas de figure : la démonstration de la conjecture de Kepler

- ▶ Conjecture de Kepler (1611) - densité optimale des oranges.
- ▶ 1998 Hales a annoncé une démonstration.

# Un cas de figure : la démonstration de la conjecture de Kepler

- ▶ Conjecture de Kepler (1611) - densité optimale des oranges.
- ▶ 1998 Hales a annoncé une démonstration.
- ▶ Basée sur la résolution de 100,000 problèmes d'optimisation.

# Kepler Hales bis

- ▶ La démonstration de Hales contenait 250 pages de maths

# Kepler Hales bis

- ▶ La démonstration de Hales contenait 250 pages de maths
- ▶ et 3 Gbtes de programmes, code et données.



# Kepler Hales bis

- ▶ La démonstration de Hales contenait 250 pages de maths
- ▶ et 3 Gbtes de programmes, code et données.
- ▶ Comment vérifier une chose pareille ?

# Publication

- ▶ Annals of Mathematics a nominé un panel de 12 rapporteurs

# Publication

- ▶ Annals of Mathematics a nommé un panel de 12 rapporteurs
- ▶ qui n'ont pas suffit.

# Publication

- ▶ Annals of Mathematics a nommé un panel de 12 rapporteurs
- ▶ qui n'ont pas suffit.
- ▶ Ils ont rapporté qu'ils étaient convaincus à 99%, mais n'avaient pas pu certifier tout le code.

# Publication

- ▶ Annals of Mathematics a nommé un panel de 12 rapporteurs
- ▶ qui n'ont pas suffit.
- ▶ Ils ont rapporté qu'ils étaient convaincus à 99%, mais n'avaient pas pu certifier tout le code.

Que faire dans ce genre de situation ?

## Quelques pistes.

- ▶ Vérification communautaire ?

## Quelques pistes.

- ▶ Vérification communautaire ?
- ▶ Vérification par équipe ?

## Quelques pistes.

- ▶ Vérification communautaire ?
- ▶ Vérification par équipe ?
- ▶ Vérification par ordinateur ?



## Quelques pistes.

- ▶ Vérification communautaire ?
- ▶ Vérification par équipe ?
- ▶ Vérification par ordinateur ?

# Quid de l'ordinateur ?

Quelle place dans les mathématiques pour les démonstrations appuyées sur du code ?

# Quid de l'ordinateur ?

Quelle place dans les mathématiques pour les démonstrations appuyées sur du code ?

Quid si le code est trop long pour être vérifiable ?

# Quid de l'ordinateur ?

Quelle place dans les mathématiques pour les démonstrations appuyées sur du code ?

Quid si le code est trop long pour être vérifiable ?

Quelle place pour la vérification automatique des preuves ?

# Démonstration vérifiée par ordinateur

- ▶ Principe : vérification automatique de démonstrations

# Démonstration vérifiée par ordinateur

- ▶ Principe : vérification automatique de démonstrations
- ▶ suggestions de étapes

# Démonstration vérifiée par ordinateur

- ▶ Principe : vérification automatique de démonstrations
- ▶ suggestions de étapes
- ▶ (base de données d'objets et résultats)

# Démonstration vérifiée par ordinateur

- ▶ Principe : vérification automatique de démonstrations
- ▶ suggestions de étapes
- ▶ (base de données d'objets et résultats)
- ▶ écrites dans langage lisible par machine



# Démonstration vérifiée par ordinateur

- ▶ Principe : vérification automatique de démonstrations
- ▶ suggestions de étapes
- ▶ (base de données d'objets et résultats)
- ▶ écrites dans langage lisible par machine

# Projet Flyspeck

- ▶ But : produire une démonstration formelle de Kepler

# Projet Flyspeck

- ▶ But : produire une démonstration formelle de Kepler
- ▶ Dbut : 1998

# Projet Flyspeck

- ▶ But : produire une démonstration formelle de Kepler
- ▶ Dbut : 1998
- ▶ Démonstration finie : 2014

# Projet Flyspeck

- ▶ But : produire une démonstration formelle de Kepler
- ▶ Dbut : 1998
- ▶ Démonstration finie : 2014
- ▶ Basée sur “Isabelle” et “Hol” .

# ”Folklore”

Pratique communautaire ou des résultats sont admis comme ”bien connus”

# ”Folklore”

Pratique communautaire ou des résultats sont admis comme ”bien connus” sans qu’une démo ait été donnée.

## ”Folklore”

Pratique communautaire ou des résultats sont admis comme ”bien connus” sans qu’une démo ait été donnée.

folklore, [] is a technical term for a method of publication in category theory. It means that someone sketched it on the back of an envelope, mimeographed it (whatever that means) and showed it to three people in a seminar in Chicago in 1973, except that the only evidence that we have of these events is a comment that was overheard in another seminar at Columbia in 1976. Nevertheless, if some younger person is so presumptuous as to write out a proper proof and attempt to publish it, they will get shot down in flames.



# "Folklore" d'aujourd'hui

Pressions à publier + taille critique communautaire

# "Folklore" d'aujourd'hui

Pressions à publier + taille critique communautaire  
moindre importance du folklore

# "Folklore" d'aujourd'hui

Pressions à publier + taille critique communautaire  
moindre importance du folklore  
remplacé par "preprint de référence".

# "Folklore" d'aujourd'hui

Pressions à publier + taille critique communautaire  
moindre importance du folklore  
remplacé par "preprint de référence".

Exemples :

- ▶ un papier fondationnel sur arxiv pendant plus que 10 ans - sans publication.

# "Folklore" d'aujourd'hui

Pressions à publier + taille critique communautaire  
moindre importance du folklore  
remplacé par "preprint de référence".

Exemples :

- ▶ un papier fondationnel sur arxiv pendant plus que 10 ans - sans publication.
- ▶ un refus de projet basé sur un preprint arxiv.

# "Folklore" d'aujourd'hui

Pressions à publier + taille critique communautaire  
moindre importance du folklore  
remplacé par "preprint de référence".

Exemples :

- ▶ un papier fondationnel sur arxiv pendant plus que 10 ans - sans publication.
- ▶ un refus de projet basé sur un preprint arxiv.
- ▶ un refus d'article basé sur un preprint non publié.

# Publicabilité réduite

Règles communautaires stricte sur la publicabilité :

# Publicabilité réduite

Règles communautaires stricte sur la publicabilité :

- ▶ pas de redémonstration



# Publicabilité réduite

Règles communautaires stricte sur la publicabilité :

- ▶ pas de redémonstration
- ▶ pas de discussion de méthode

# Publicabilité réduite

Règles communautaires stricte sur la publicabilité :

- ▶ pas de redémonstration
- ▶ pas de discussion de méthode

Limitent les possibilités de "contrôle de qualité".

# Refus de l'erreur

- ▶ Communauté se définissant par la certitude

# Refus de l'erreur

- ▶ Communauté se définissant par la certitude
- ▶ peu de tolérance de l'erreur

# Refus de l'erreur

- ▶ Communauté se définissant par la certitude
- ▶ peu de tolérance de l'erreur
- ▶ problématique pour le contrôle qualité

# Refus de l'erreur

- ▶ Communauté se définissant par la certitude
- ▶ peu de tolérance de l'erreur
- ▶ problématique pour le contrôle qualité
- ▶ problématique pour le développement du sujet

# Tabou de la correction

- ▶ La littérature mathématique se caractérise par un taux bas de corrections

# Tabou de la correction

- ▶ La littérature mathématique se caractérise par un taux bas de corrections
- ▶ 0,6% de la littérature mathématiques (contre un peu plus que 1% en gnral)



# Tabou de la correction

- ▶ La littérature mathématique se caractérise par un taux bas de corrections
- ▶ 0,6% de la littérature mathématiques (contre un peu plus que 1% en gnral)
- ▶ Quel part d'auto-censure ?

# Tabou de la correction

- ▶ La littérature mathématique se caractérise par un taux bas de corrections
- ▶ 0,6% de la littérature mathématiques (contre un peu plus que 1% en gnral)
- ▶ Quel part d'auto-censure ?
- ▶ Survol des erreurs du 19<sup>ième</sup> siècle : rarement soulev par les auteurs

# Tabou de la correction

- ▶ La littérature mathématique se caractérise par un taux bas de corrections
- ▶ 0,6% de la littérature mathématiques (contre un peu plus que 1% en gnral)
- ▶ Quel part d'auto-censure ?
- ▶ Survol des erreurs du 19<sup>ième</sup> siècle : rarement soulev par les auteurs
- ▶ Grand nombre d'erreurs publiées “discrètement” .

# Vérification communautaire

- ▶ Résultats centraux - émergence vérification communautaire.

# Vérification communautaire

- ▶ Résultats centraux - émergence vérification communautaire.
- ▶ Exemples : BCHM, Perelmann.

# Vérification communautaire

- ▶ Résultats centraux - émergence vérification communautaire.
- ▶ Exemples : BCHM, Perelmann.
- ▶ Cf Voevodsky - Deligne

# Vérification communautaire

- ▶ Résultats centraux - émergence vérification communautaire.
- ▶ Exemples : BCHM, Perelmann.
- ▶ Cf Voevodsky - Deligne
- ▶ Peu formalisé.

# Vérification communautaire

- ▶ Résultats centraux - émergence vérification communautaire.
- ▶ Exemples : BCHM, Perelmann.
- ▶ Cf Voevodsky - Deligne
- ▶ Peu formalisé.
- ▶ Limites : non applicable à la masse des articles



# Vérification communautaire

- ▶ Résultats centraux - émergence vérification communautaire.
- ▶ Exemples : BCHM, Perelmann.
- ▶ Cf Voevodsky - Deligne
- ▶ Peu formalisé.
- ▶ Limites : non applicable à la masse des articles
- ▶ Reconnaissance travail ?

# A quoi sert un journal ?

Le rôle des journaux est peu clair

# A quoi sert un journal ?

Le rôle des journaux est peu clair

- ▶ plus de rôle de distribution

# A quoi sert un journal ?

Le rôle des journaux est peu clair

- ▶ plus de rôle de distribution
- ▶ reste vérification/évaluation

# A quoi sert un journal ?

Le rôle des journaux est peu clair

- ▶ plus de rôle de distribution
- ▶ reste vérification/évaluation
- ▶ calqué sur modèle de distribution

# A quoi sert un journal ?

Le rôle des journaux est peu clair

- ▶ plus de rôle de distribution
- ▶ reste vérification/évaluation
- ▶ calqué sur modèle de distribution

Quasi-totalité des articles de recherche publié en amont sur arxiv.

Quasi-totalité des articles de recherche publié en amont sur arxiv.  
Avantages :



Quasi-totalité des articles de recherche publié en amont sur arxiv.

Avantages :

- ▶ Distribution rapide des connaissances

Quasi-totalité des articles de recherche publié en amont sur arxiv.

Avantages :

- ▶ Distribution rapide des connaissances
- ▶ Moindre nécessité d'être dans un groupe puissant

Quasi-totalité des articles de recherche publié en amont sur arxiv.

Avantages :

- ▶ Distribution rapide des connaissances
- ▶ Moindre nécessité d'être dans un groupe puissant
- ▶ Vérification communautaire.

# Désavantages

- ▶ "Preprint de référence"

# Désavantages

- ▶ " Preprint de référence"
- ▶ Difficulté à maintenir la sincérité de la littérature

# Désavantages

- ▶ " Preprint de référence"
- ▶ Difficulté à maintenir la sincérité de la littérature
- ▶ Absence de confidentialité (rapports/erreurs).

# Ecart production-processus

- ▶ Présentation uniquement de produit final

# Ecart production-processus

- ▶ Présentation uniquement de produit final
- ▶ : processus disparue



# Ecart production-processus

- ▶ Présentation uniquement de produit final
- ▶ : processus disparue
- ▶ difficultés à investir la production

# Ecart production-processus

- ▶ Présentation uniquement de produit final
- ▶ : processus disparue
- ▶ difficultés à investir la production

Commentaire récurrent : "je suis quand vous faites, mais je ne sais pas commencer moi même"

# Lien à la "peur" de l'erreur

Un constant : difficulté à accepter de tatonner

## Lien à la "peur" de l'erreur

Un constant : difficulté à accepter de tatonner  
Blocage à l'idée d'écrire quelque chose d'erronée.

# Difficultés de formalisation

- ▶ l'étudiant "sent" l'idée

# Difficultés de formalisation

- ▶ l'étudiant "sent" l'idée
- ▶ mais n'arrive pas à le formaliser

# Difficultés de formalisation

- ▶ l'étudiant "sent" l'idée
- ▶ mais n'arrive pas à le formaliser

Commentaire récurrent : "je vois que c'est vrai, mais je ne sais pas le démontrer"

# Lien au temps

- ▶ défaut de traduction



## Lien au temps

- ▶ défaut de traduction
- ▶ compétence peu travaillée

# Lien au temps

- ▶ défaut de traduction
- ▶ compétence peu travaillée
- ▶ pourtant, nécessite du temps.

# Lien au temps

- ▶ défaut de traduction
- ▶ compétence peu travaillée
- ▶ pourtant, nécessite du temps.

# Fuite en arrière

- ▶ Remonter jusqu'à ou dans la chaîne ?

# Fuite en arrière

- ▶ Remonter jusqu'à ou dans la chaîne ?
- ▶ pas jusqu'à Peano chaque fois ?

# Fuite en arrière

- ▶ Remonter jusqu'à ou dans la chaîne ?
- ▶ pas jusqu'à Peano chaque fois ?
- ▶ Conventions "cachées" sur les axiomes

# Fuite en arrière

- ▶ Remonter jusqu'à ou dans la chaîne ?
- ▶ pas jusqu'à Peano chaque fois ?
- ▶ Conventions "cachées" sur les axiomes
- ▶ variable selon les niveaux/communautés.

# Fuite en arrière

- ▶ Remonter jusqu'à ou dans la chaîne ?
- ▶ pas jusqu'à Peano chaque fois ?
- ▶ Conventions "cachées" sur les axiomes
- ▶ variable selon les niveaux/communautés.

Commentaire récurrent : "Est ce que j'ai le droit d'écrire \*\*\*\* ?"



# Problème de temps

- ▶ La démonstration est présentée dès la L1

# Problème de temps

- ▶ La démonstration est présentée dès la L1
- ▶ mais devient nécessaire qu'en L3

# Problème de temps

- ▶ La démonstration est présentée dès la L1
- ▶ mais devient nécessaire qu'en L3
- ▶ Entrée en L3 : gros écarts

# Problème de temps

- ▶ La démonstration est présentée dès la L1
- ▶ mais devient nécessaire qu'en L3
- ▶ Entrée en L3 : gros écarts

# Nécessité du temps

- ▶ La démonstration = langage à assimiler

# Nécessité du temps

- ▶ La démonstration = langage à assimiler
- ▶ grand temps incompressible d'apprentissage

# Nécessité du temps

- ▶ La démonstration = langage à assimiler
- ▶ grand temps incompressible d'apprentissage
- ▶ (Enfant bilingue : estimations vers 30% du temps d'immersion pour un bilinguisme parfait)

# Nécessité du temps

- ▶ La démonstration = langage à assimiler
- ▶ grand temps incompressible d'apprentissage
- ▶ (Enfant bilingue : estimations vers 30% du temps d'immersion pour un bilinguisme parfait)



# Pressions sur le part des démonstrations

- ▶ Mutualisations nombreuses

# Pressions sur le part des démonstrations

- ▶ Mutualisations nombreuses
- ▶ Compensations

# Pressions sur le part des démonstrations

- ▶ Mutualisations nombreuses
- ▶ Compensations
- ▶ UEs non disciplinaires

# Pressions sur le part des démonstrations

- ▶ Mutualisations nombreuses
- ▶ Compensations
- ▶ UEs non disciplinaires

# Raisonnements par imitation/analogie

- ▶ Production naturelle des étudiants.

# Raisonnements par imitation/analogie

- ▶ Production naturelle des étudiants.
- ▶ Difficultés à s'auto-corriger.

# Raisonnements par imitation/analogie

- ▶ Production naturelle des étudiants.
- ▶ Difficultés à s'auto-corriger.
- ▶ Nécessaire dans la processus.

# Langage naturel

- ▶ On approche la précision mathématique par le langage naturel.



# Langage naturel

- ▶ On approche la précision mathématique par le langage naturel.
- ▶ Jugement : jusqu'à ou doit on aller ?

# Langage naturel

- ▶ On approche la précision mathématique par le langage naturel.
- ▶ Jugement : jusqu'à ou doit on aller ?
- ▶ Variable selon les coutumes, pays, disciplines.

# Langage naturel

- ▶ On approche la précision mathématique par le langage naturel.
- ▶ Jugement : jusqu'à ou doit on aller ?
- ▶ Variable selon les coutumes, pays, disciplines.
- ▶ Pas évident même pour nous !

# Langage bas niveau vs langage haut niveau

- ▶ Quelle est la taille de blocs admissibles ?

# Langage bas niveau vs langage haut niveau

- ▶ Quelle est la taille de blocs admissibles ?
- ▶ Très variable selon le niveau

# Langage bas niveau vs langage haut niveau

- ▶ Quelle est la taille de blocs admissibles ?
- ▶ Très variable selon le niveau et selon le sujet...

# Langage bas niveau vs langage haut niveau

- ▶ Quelle est la taille de blocs admissibles ?
- ▶ Très variable selon le niveau et selon le sujet...
- ▶ Non homogène entre enseignants.

# Pédagogie inversée

Depuis 2016 : basculement des TDs en mode inversée.

- ▶ en TD : travail en groupe sous ma direction



# Pédagogie inversée

Depuis 2016 : basculement des TDs en mode inversée.

- ▶ en TD : travail en groupe sous ma direction
- ▶ chaque groupe avance à son rythme

# Pédagogie inversée

Depuis 2016 : basculement des TDs en mode inversée.

- ▶ en TD : travail en groupe sous ma direction
- ▶ chaque groupe avance à son rythme
- ▶ postage vidéo correction après le cours

# Pédagogie inversée

Depuis 2016 : basculement des TDs en mode inversée.

- ▶ en TD : travail en groupe sous ma direction
- ▶ chaque groupe avance à son rythme
- ▶ postage vidéo correction après le cours
- ▶ quand tous les groupes ont travaillé

# Pédagogie inversée

Depuis 2016 : basculement des TDs en mode inversée.

- ▶ en TD : travail en groupe sous ma direction
- ▶ chaque groupe avance à son rythme
- ▶ postage vidéo correction après le cours
- ▶ quand tous les groupes ont travaillé

Temps de TD essentiellement concentré sur le processus.

Pour la production.

- ▶ vidéos : correction complète

# Pour la production.

- ▶ vidéos : correction complète
- ▶ DMs hebdomadaires

# Pour la production.

- ▶ vidéos : correction complète
- ▶ DMs hebdomadaires
- ▶ "exercice d'écriture"

# Pour la production.

- ▶ vidéos : correction complète
- ▶ DMs hebdomadaires
- ▶ "exercice d'écriture"
- ▶ exercices simples, rédaction précise attendue.



# Différentiation

- ▶ Cours de L2 : expérimentation de différentiation

# Différentiation

- ▶ Cours de L2 : expérimentation de différentiation
- ▶ Cours en présentiel “de base”

# Différentiation

- ▶ Cours de L2 : expérimentation de différenciation
- ▶ Cours en présentiel “de base”
- ▶ Cours écrit “supplémentaire”

# Différentiation

- ▶ Cours de L2 : expérimentation de différenciation
- ▶ Cours en présentiel “de base”
- ▶ Cours écrit “supplémentaire”

# Pendant le cours

- ▶ passage de groupe en groupe

# Pendant le cours

- ▶ passage de groupe en groupe
- ▶ recadre

# Pendant le cours

- ▶ passage de groupe en groupe
- ▶ recadre rebondit

# Pendant le cours

- ▶ passage de groupe en groupe
- ▶ recadre rebondit indique des pistes



# Pendant le cours

- ▶ passage de groupe en groupe
- ▶ recadre rebondit indique des pistes indique des développements.

# Pendant le cours

- ▶ passage de groupe en groupe
- ▶ recadre rebondit indique des pistes indique des développements.
- ▶ Adaption via indices au niveau des groupes

# Pendant le cours

- ▶ passage de groupe en groupe
- ▶ recadre rebondit indique des pistes indique des développements.
- ▶ Adaption via indices au niveau des groupes
- ▶ Blocage généralisé : bascule en vertical.

# Interaction en groupe

- ▶ Partir de la production de l'étudiant

# Interaction en groupe

- ▶ Partir de la production de l'étudiant
- ▶ Quelles sont les bonnes idées ?

# Interaction en groupe

- ▶ Partir de la production de l'étudiant
- ▶ Quelles sont les bonnes idées ?
- ▶ Que manque-t-il ?

# Interaction en groupe

- ▶ Partir de la production de l'étudiant
- ▶ Quelles sont les bonnes idées ?
- ▶ Que manque-t-il ?
- ▶ Que ne fonctionne pas ?

# Interaction en groupe

- ▶ Partir de la production de l'étudiant
- ▶ Quelles sont les bonnes idées ?
- ▶ Que manque-t-il ?
- ▶ Que ne fonctionne pas ?



# Avantages généraux

- ▶ Travail principal sur le processus

# Avantages généraux

- ▶ Travail principal sur le processus
- ▶ Etudiants actifs

# Avantages généraux

- ▶ Travail principal sur le processus
- ▶ Etudiants actifs
- ▶ donc engagés.

# Avantages généraux

- ▶ Travail principal sur le processus
- ▶ Etudiants actifs
- ▶ donc engagés.
- ▶ Suivi proche de la compréhension

# Avantages généraux

- ▶ Travail principal sur le processus
- ▶ Etudiants actifs
- ▶ donc engagés.
- ▶ Suivi proche de la compréhension
- ▶ Travail par niveau possible

# Avantages généraux

- ▶ Travail principal sur le processus
- ▶ Etudiants actifs
- ▶ donc engagés.
- ▶ Suivi proche de la compréhension
- ▶ Travail par niveau possible
- ▶ Choix des vidéos à regarder.

# Points de vigilance

- ▶ Plus de temps par exercice

# Points de vigilance

- ▶ Plus de temps par exercice
- ▶ Dépendance à l'autonomie



# Points de vigilance

- ▶ Plus de temps par exercice
- ▶ Dépendance à l'autonomie
- ▶ Vigilance à tourner assez vite

# Points de vigilance

- ▶ Plus de temps par exercice
- ▶ Dépendance à l'autonomie
- ▶ Vigilance à tourner assez vite
- ▶ Passer rapidement aux groupes susceptibles de bloquer

# Points de vigilance

- ▶ Plus de temps par exercice
- ▶ Dépendance à l'autonomie
- ▶ Vigilance à tourner assez vite
- ▶ Passer rapidement aux groupes susceptibles de bloquer
- ▶ Groupes trop hétérogènes

# Points de vigilance

- ▶ Plus de temps par exercice
- ▶ Dépendance à l'autonomie
- ▶ Vigilance à tourner assez vite
- ▶ Passer rapidement aux groupes susceptibles de bloquer
- ▶ Groupes trop hétérogènes
- ▶ Reflexe de demander de l'aide

# Points de vigilance

- ▶ Plus de temps par exercice
- ▶ Dépendance à l'autonomie
- ▶ Vigilance à tourner assez vite
- ▶ Passer rapidement aux groupes susceptibles de bloquer
- ▶ Groupes trop hétérogènes
- ▶ Reflexe de demander de l'aide

# Avantages spécifiques à la démonstration

- ▶ Erreurs debusquées

# Avantages spécifiques à la démonstration

- ▶ Erreurs debusquées
- ▶ Rebondir : démonstration partielles valorisées

# Avantages spécifiques à la démonstration

- ▶ Erreurs debusquées
- ▶ Rebondir : démonstration partielles valorisées