Théorie des Situations Didactiques (TSD) et situations de preuve

Cécile Ouvrier-Buffet

LDAR – UPEC

La preuve en didactique

- **Des processus variés en lien direct avec la preuve**
  - Explorations d'un problème (induction) ; Etude de cas particuliers, d'exemples ; Formulation d'un énoncé mathématique ; Formulation de conjectures ; Réfutations, contre-exemples – exploration du domaine de validité de la conjecture ; Modélisation (intra- ou extra-mathématique) ; Production de définitions, de théories locales ; Recherche de 'patterns' ; Généralisations ; Raisonnement par analogie ; Utilisation de différentes représentations, cadres, registres ; la logique ....
- **Différentes fonctions de la preuve**
  - décider ; justifier ou réfuter ; convaincre ; savoir ; expliquer ; découvrir (inventer de nouveaux résultats) ; communiquer ; systématiser / créer des théories locales ; illustrer de nouvelles méthodes de déduction ; défendre une définition ; défendre une axiomatique…
- **ROLE FONDAMENTAL DE L'ENSEIGNANT (incitateur et modérateur) + COMMUNAUTE MATH dans la classe** (e.g. Hanna, 1995 ; Yackel & Cobb, 1994)
  - Par exemple : valide ce qui est acceptable, analyse les arguments des élèves (qui ne sont pas forcément sur la validité mathématique mais cherchent à convaincre autrui), identifie une structure de la preuve qui sera traduite en démonstration, doit prendre de la distance par rapport à l'image de la rigueur en maths
  - **Pour les élèves, le « pourquoi » n'est pas forcément fondamental comme pour le mathématicien.**

Définitions (Balacheff, 1987)

- **Preuve** : *une explication acceptée par une communauté donnée à un moment donné* (débat pour déterminer un système de validation commun aux interlocuteurs)
- **Preuves pragmatiques (dans l'action)** : règles d'**action**, théorèmes-**en-acte** non prouvés (validité de l'action interrogée).
- Importance du caractère **générique**
- **Preuves intellectuelles** (changement de posture nécessaire) : décontextualiser, dépersonnaliser, détemporaliser

Contexte d'émergence de la TSD

- Années 60 : nécessité d'une nouvelle approche de l'enseignement des mathématiques (restructurer l'enseignement des mathématiques après la redéfinition des mathématiques elles-mêmes par les mathématiciens), initiée notamment par les travaux de la CIEAEM (*Commission Internationale pour l'eEtude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques*)
- 1973 - 1999 : Centre d'Observation et de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (COREM) (Brousseau)

Fondements et situation didactique ?

- **Hypothèses**
  - Psychologique : apprentissage par adaptation (Piaget)
  - Epistémologique : construction « contre » des connaissances antérieures (Bachelard) ; pour tout savoir, il existe une famille de situations susceptible de lui donner du sens (Brousseau)
  - Didactique : nécessité d'une intention d'apprentissage
- **Vers un modèle de la situation didactique**
  - Une situation favorisant des déséquilibres (Piaget), des **rétroactions**
  - Dans un modèle **ternaire** (le savoir, l'élève et le maître) (Vygotsky)
  - Où l'**erreur** est vue comme la manifestation d'un obstacle, d'une **conception erronée** (Bachelard)
    - Les erreurs ne sont pas dues au hasard : elles sont reproductibles, persistantes … mais pas forcément explicitables …

  -> Importance des phases de **formulation** (Vygotsky, Brousseau)

Théorie des Situations Didactiques (Brousseau, 1998)

- **Un projet scientifique** pour un meilleur enseignement des maths → créer une science rattachée aux sciences dures (notamment méthodologie des sciences expérimentales)
- Une didactique fondamentale à l'intérieur des mathématiques, qui les interroge : une réflexion **épistémologique** pour **concevoir**, **anticiper** et **réaliser** des conditions dans lesquelles les élèves peuvent produire un véritable travail mathématique
- Rôle des situations comme **modèles** du fonctionnement des mathématiques
- Importance de **l'analyse *a priori*** pour prédire avant la mise en œuvre en classe → **confrontation** de l'analyse *a priori* et de la réalisation pour tester la validité et la pertinence du modèle construit.

La preuve chez Brousseau (1998, p.39s)

« Il ne s'agit donc pas seulement pour l'enfant de « savoir » des mathématiques mais de les utiliser en tant que raisons d'accepter ou de rejeter une proposition (un théorème), une stratégie, un modèle, ce qui exige une attitude de preuve. (…) En mathématique, le « pourquoi » ne peut pas être appris seulement par référence à l'autorité de l'adulte. (…) Nous considérons donc que faire des mathématiques est d'abord pour l'enfant une activité sociale et non pas seulement individuelle. (…) L'examen d'une preuve est une attitude réflexive (…) En général, la preuve ne pourra être formulée qu'après avoir été utilisée et éprouvée en tant que règle implicite soit dans l'action soit dans les discussions. »

« Ils adoptent des théories fausses, acceptent des preuves insuffisantes ou fausses (…) Le système de preuve fonctionne alternativement :

- Comme moyen implicite. Par exemple les enfants acceptent d'un accord tacite un fait non formulé ou un moyen de preuve (logique ou modèle implicite)
- Comme moyen de communiquer explicitement une raison avancée
- Comme objet d'étude mis consciemment à l'épreuve logique, sémantique ou pragmatique. »

Phases d'une situation a-didactique

- Dévolution (situation didactique)
- A-didactique
  - Situation d'**action** : la connaissance de l'élève se manifeste par des décisions (succès ou échec) (« modèles implicites ». Amener les élèves à décrire leurs actions → *situation de formulation*
  - Situation de **formulation** : le succès exige qu'un élève formule la connaissance à l'intention de l'autre. Mais comment discuter la validité du contenu ?
    → organiser une *situation de validation*
  - Situation de **validation** : construction formelle dans un répertoire de règles ou de « théorèmes » reconnus. Qui valide quoi et comment ? (« ça marche » *versus* « pourquoi ça marche à tous les coups ? »)
- Institutionnalisation de connaissances, procédures etc. (retour à la situation didactique)

L’exemple de la course à 20

La course à *n*

- **Jeu 1. "La course à 20"** Le jeu comporte deux adversaires qui disent un nombre tour à tour. Il s'agit pour chacun des adversaires de réussir à dire 20 le premier. Le premier qui joue a le droit de dire 1 ou 2. On ne peut dire un nombre que s'il s'obtient en ajoutant 1 ou 2 au nombre que l'adversaire vient de dire.
- **Jeu 2. "La course à 27"** Il s'agit de réussir à dire 27 le premier. Celui qui commence à jouer a le droit de dire un entier *non nul* inférieur ou égal à 4. On ne peut dire un nombre que s'il s'obtient en ajoutant un nombre inférieur ou égal à 4 au nombre que l'adversaire vient de dire.
- **Jeu 3. "La course à 24"** Il s'agit de réussir à dire 24 le premier. Le premier qui joue a le droit de dire un entier non nul inférieur ou égal à 3. On ne peut dire un nombre que s'il s'obtient en ajoutant un nombre inférieur ou égal à 3 au nombre que l'adversaire vient de dire.
- **Jeu 4. "La course à 5929"** Il s'agit de réussir à dire 5929 le premier. Le premier qui joue a le droit de dire un entier non nul inférieur ou égal à 2. On ne peut dire un nombre que s'il s'obtient en ajoutant un nombre inférieur ou égal à 2 au nombre que l'adversaire vient de dire.

Variables didactiques : définition

- Une variable **cognitive** est un paramètre de la situation qui modifie la connaissance nécessaire à la solution
- La notion de **variable didactique** d'une situation adidactique désigne une variable :
  - "*à la disposition de l'enseignant*" : l'enseignant peut faire un choix en rapport avec son projet d'enseignement, choix objectivé comme une valeur de cette variable. Les autres valeurs représentent d'autres choix possibles non retenus qu'il est important de décrire pour comprendre la signification du savoir dans la situation particulière ;
  - telle que ses valeurs pertinentes changent la "*hiérarchie*" des stratégies possibles, ou encore change la stratégie "*optimale*" de la situation (et donc la signification du savoir visé).

La course à 20 (jeu 1)

- Gagne celui qui joue le premier en disant 2, puis 5, 8, 11, 14, 17, 20 (qu'il peut dire quoique dise l'adversaire)
- Exemples de formulations d’élèves
  - (sémantique) *Si je dis 15, je perds, parce que toutes les fois que j’ai joué 15, j’ai perdu.*
  - (pragmatique) *En jouant 14, je gagne, la preuve, faisons-le … je gagne.*
  - (intellectuelle) *Si je joue 17, je gagne car l’autre joue 18 ou 19, et alors moi je joue 20 dans les deux cas.*
- Très vite, on "sait" que celui qui dit 17 a gagné : la course à 20 devient la course à 17. On peut donc réitérer le raisonnement. En fait, la suite gagnante se trouve "en descendant" : 20, 17, 14 etc.
- Idée de *position gagnante*
- Notion de *noyau* (théorie des jeux ; ensemble des nœuds depuis lesquels la victoire est assurée si l’on y parvient en cours de jeu et qu’on joue de façon optimale ensuite)

La course à 27 (jeu 2)

- Pour arriver à dire 27 le premier quel nombre faut-il dire juste avant ?
- (Raisonnement analogue au 17 de la course à 20)
  - Si je dis 26, mon adversaire peut ajouter 1 et dire 27 ; si je dis 25, mon adversaire peut ajouter 2 et dire 27 ; si je dis 24, mon adversaire peut ajouter 3 et dire 27 ; si je dis 23, mon adversaire peut ajouter 4 et dire 27 ; si je dis 22, quoiqu'ajoute mon adversaire - 1, 2, 3 ou 4, j 'ajouterais le complément à 5 : 1+4, 2+3, : je dirais donc 27 le premier.
- Stratégie gagnante : gagne celui qui joue le premier en disant 2.
  Noyau : 27, 22, 17, 12, 7, 2

La course à 24 (jeu 3)

- Pouvez-vous gagner en utilisant la stratégie que vous avez proposée après le jeu 2 ?
- Non, gagne celui qui joue le deuxième en disant 4 que l'on ne peut jamais dire le premier ☺
- Noyau : 24, 20, 16, 12, 8, 4

La course à 5929 (jeu 4)

- Le jeu se transforme en : qui gagne ? faut-il commencer ? en disant quel nombre ?
- Le jeu de la course à 5929, devient le jeu à 5926. 5929, 5926, 5923 …
- Par économie, on n’écrira pas le noyau.
- Gagne celui qui joue le premier en disant 1.

La course à 20 (jeu 4) [saut]-> preuve ?

- *Situation de validation* (sociale et culturelle) / *dialectique de la validation*
  - Établir la validité d'une connaissance/stratégie selon les règles du débat scientifique
  - Construire un répertoire de règles, propositions, théorèmes
  - Dans la dynamique des dialectiques d'action et de formulation
  - Amener les élèves à identifier des erreurs, des théories locales etc.

- Et si cela ne suffit pas ? Et ensuite ? → *institutionnalisation*

Variables didactiques

- On ajoute des entiers consécutifs … ou pas.

- V1 : n multiple de $(p+1)$ ou non
  - Si n n'est pas multiple de $(p+1)$ il faut commencer.
  - Si n est multiple de $(p+1)$, il ne faut pas commencer [jeu 3].

Variables didactiques

- V2 : taille de *n* relativement à *p* (*n* petit ou grand par rapport à *p*)
  - Si *n* est petit par rapport à *p*
    - L'écriture du noyau est possible (la stratégie de soustraction réitérée de (*p+1*) est une stratégie optimale concurrente à la division euclidienne qui ne donne pas le noyau)
  - Si *n* est très grand relativement à *p*
    - La stratégie de soustractions réitérées devient très coûteuse.
    - Le jeu change alors de nature : pour gagner, faut-il commencer ? en disant quel nombre ?
    - La stratégie des soustractions réitérées doit s'adapter et se transformer (on cherche à soustraire à *n* le multiple de (*p+1*) le plus grand possible)

Un savoir mathématique ?

- La division euclidienne de *n* par l'entier (p+1) :
  - $n = (p+1) * q + r$ avec $0 \leq r < (p+1)$
- Le "sens" de cette division (dans les jeux de la course à n) est la soustraction réitérée de (p+1) à n : le plus petit entier auquel on arrive est le reste.
  - Pour le jeu 1, la division de 20 par 3 donne comme reste 2 et pour arriver à 2 il faut soustraire 6 fois 3.
  - Pour le jeu 4, la division de 5929 par 3 donne 1 et le nombre de soustraction de 3 est 1000+800+100+70+6, c'est à dire 1976.
- Autres choix de variables possibles ? Autre situation ?

Situation d'institutionnalisation (de quoi ?)

- Une connaissance utilisée dans une situation d'action, de formulation ou de preuve change de statut : elle devient **référence pour des utilisations futures**.
- Intervention spécifique de l'enseignant (mais pas que) pour **déclarer le savoir**.

- L'étude des conditions didactiques de la **mise en œuvre** des situations adidactiques est indispensable.

- Le savoir mathématique est *décontextualisé*, *dépersonnalisé*. Les connaissances construites dans une situation sont contextualisées (l'enseignant a produit une contextualisation). L'institutionnalisation va permettre une *décontextualisation*, *dépersonnalisation* pour les élèves et faire émerger les connaissances/compétences attendues par « l'école ».
- Il peut y avoir un décalage entre dévolution et institutionnalisation.

Nouvelles règles : ajouter 1, 3 ou 4 (jeu 5)

- **Jeu 5. "La course à 20 – nouvelles règles"** Il s'agit de réussir à dire 20 le premier. Le premier qui joue a le droit de dire 1 ou 3 ou 4. On ne peut dire un nombre que s'il s'obtient en ajoutant 1 ou 3 ou 4 au nombre que l'adversaire vient de dire.
- Noyau : 4 - 6 - 11 - 13 - 18 – 20
- Généralisation ?
- Un nouveau saut … ou une nouvelle situation ?

Le problème de Frobenius

Une **SI**tuation de **R**echerche pour la **C**lasse (SiRC)

Origine : Problème de Frobenius (vers 1900) - *Etant donné des entiers positifs $a_1,\ldots,a_n$ premiers entre eux, trouver le plus grand entier qui n'est pas une combinaison linéaire de $a_1,\ldots,a_n$ à coefficients entiers positifs.*

Le problème de Frobenius

- *Etant donné des entiers positifs $a_1,...,a_n$ premiers entre eux, trouver le plus grand entier (appelé Nombre de Frobenius) qui n'est pas une combinaison linéaire de $a_1,...,a_n$ à coefficients entiers positifs (not representable).*
- *Le nombre de Frobenius $g(a_1,...,a_n)$ existe et est fini.*
- Exemple : $a_1 = 3$ *et* $a_2 = 8$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 …… g(3, 8) = 13

- Th de Sylvester (1882) : $a_1 a_2 - a_1 - a_2$
- NP-hard
- Theorem (Kannan, 1992) : There is a polynomial time algorithm to compute *g(a1,...,an)* when *n* ≥ 2 is fixed.
- http://mathsjavascript.free.fr/frobenius_9_page.html

Exploitations du problème de Frobenius

PISA : *Serait-il possible d'utiliser un système de monnaie (ou un système de timbres) qui utiliserait exclusivement les valeurs 3 et 5 ?*
Plus spécifiquement, quels montants pourrait- on obtenir ainsi ?
S'il s'avérait possible, un tel système serait-il souhaitable ?

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON

Concours d'admission session 2020

Filière universitaire : Second concours

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆ ⋆ ⋆

Problème

Soit p et q deux nombres premiers vérifiant $3 \leq p < q$. On note $\langle p, q\rangle$ l'ensemble des nombres de la forme $mp + nq$ pour (m, n) parcourant $\mathbb{N}^2$.

1. Montrer que tout nombre entier $R \geq (p-1)(q-1)$ appartient à $\langle p, q\rangle$.
2. Le nombre $(p-1)(q-1)-1$ appartient-il à $\langle p, q\rangle$?
3. Quel est le rayon de convergence de la série entière
$$S(z) = \sum_{s \in \langle p,q\rangle} z^s \ ?$$
4. On définit les polynômes suivants:
$$H(X) = \sum_{s \in \mathbb{N}\setminus\langle p,q\rangle} X^s, \qquad K(X) = 1 + (X-1)H(X),$$
qui sont à coefficients entiers.
   (a) Exprimer $H(z)$ et $K(z)$ au moyen de $S(z)$, pour z dans le domaine de convergence. Quel est le degré d de K ?
   (b) Calculer K pour le choix $(p, q) = (3, 5)$.
5. On considère les coefficients de K :
$$K(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_d X^d.$$
Montrer que
$$a_j = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad j \notin \langle p,q\rangle \quad \text{et} \quad j-1 \in \langle p,q\rangle, \\ 1 & \text{si} \quad j \in \langle p,q\rangle \quad \text{et} \quad j-1 \notin \langle p,q\rangle, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1

Problème de Frobenius – Questions

- Objectifs ? Savoir(s) visé(s) ?
  - Qu'attend-on des élèves ?
  - Quelle activité ?
  - Reformulation du problème ?
  - Dans quel cadre mathématique ?
  - Etude de cas particuliers ?
- Variables didactiques ?
- Validation ?
- Preuves ?

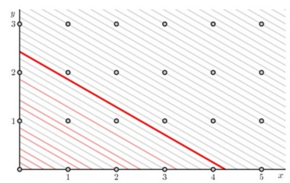
Le problème de Frobenius

- Un problème dans des livres d'**arithmétique** : *At McDonald's, Chicken McNuggets are available in packs of either 6, 9, or 20 nuggets. What is the largest number of McNuggets that one cannot purchase?*
- **A vous !**
    - Liste de tous les cas possibles … un peu long
    - Montrer que 43 n'est pas atteignable
    - Montrer que tous les entiers suivants sont atteignables (de 44 à 49, et que tous les suivants peuvent s'écrire comme un multiple de 6 + l'un de ces nombres)

$$
\begin{aligned}
44 &= 1\cdot 20 + 0\cdot 9 + 4\cdot 6\\
45 &= 0\cdot 20 + 3\cdot 9 + 3\cdot 6\\
46 &= 2\cdot 20 + 0\cdot 9 + 1\cdot 6\\
47 &= 1\cdot 20 + 3\cdot 9 + 0\cdot 6\\
48 &= 0\cdot 20 + 0\cdot 9 + 8\cdot 6\\
49 &= 2\cdot 20 + 1\cdot 9 + 0\cdot 6
\end{aligned}
$$

Problème de Frobenius – Premières pistes

- Existence et borne sup (à améliorer)
    - Si on peut trouver a_1 nombres *N, N+1, … N+* a_1 *-1* atteignables, alors tous les entiers supérieurs à *N* sont atteignables (existence et borne sup)
    - $(a_1,\ldots,a_n) = 1$ → grouper les termes négatifs et les termes positifs, et écrire 1 = (K+1)-K où (K+1) et K sont atteignables. Alors $N = (a_1-1)K$ est le 1er d'une suite de a_1 nombres atteignables consécutifs.
        - Mc Nuggets
            - (6, 9, 20) = 1
            - 7x9 – (7x6+1x20) – 1 -> a_1 = 6 et *K* = 62 -> *N* = 5x62=310 suite de 6 nombres atteignables : existence de $g(a_1,\ldots,a_3)<310$
- Congruences
- On cherche le plus grand nombre m tel quel $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i = m$ n'ait pas de solution
- Equations diophantiennes
- Algorithmes
- Séries
- Géométrie discrète (Pick)



- **Variables didactiques** : le couple de nombres, nb de nombres, ancrage de la situation initiale
- **Apprentissages ?** nb premiers, Bezout, petit Th. de Fermat, algorithme d'Euclide … concepts d'algèbre linéaire

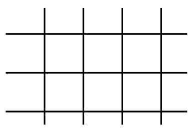
Frobenius en SiRC

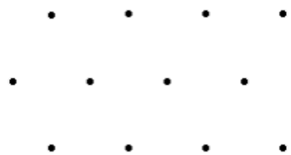
- On reste proche de la recherche mathématique et des concepts en jeu, on change la situation initiale

Déplacements sur une grille (entière)

- *Deux déplacements permettent-ils d'aller partout sur la grille ?*
- *Et avec trois ? Et avec quatre ? (etc.)*
- *Et si maintenant on en enlève un ?*

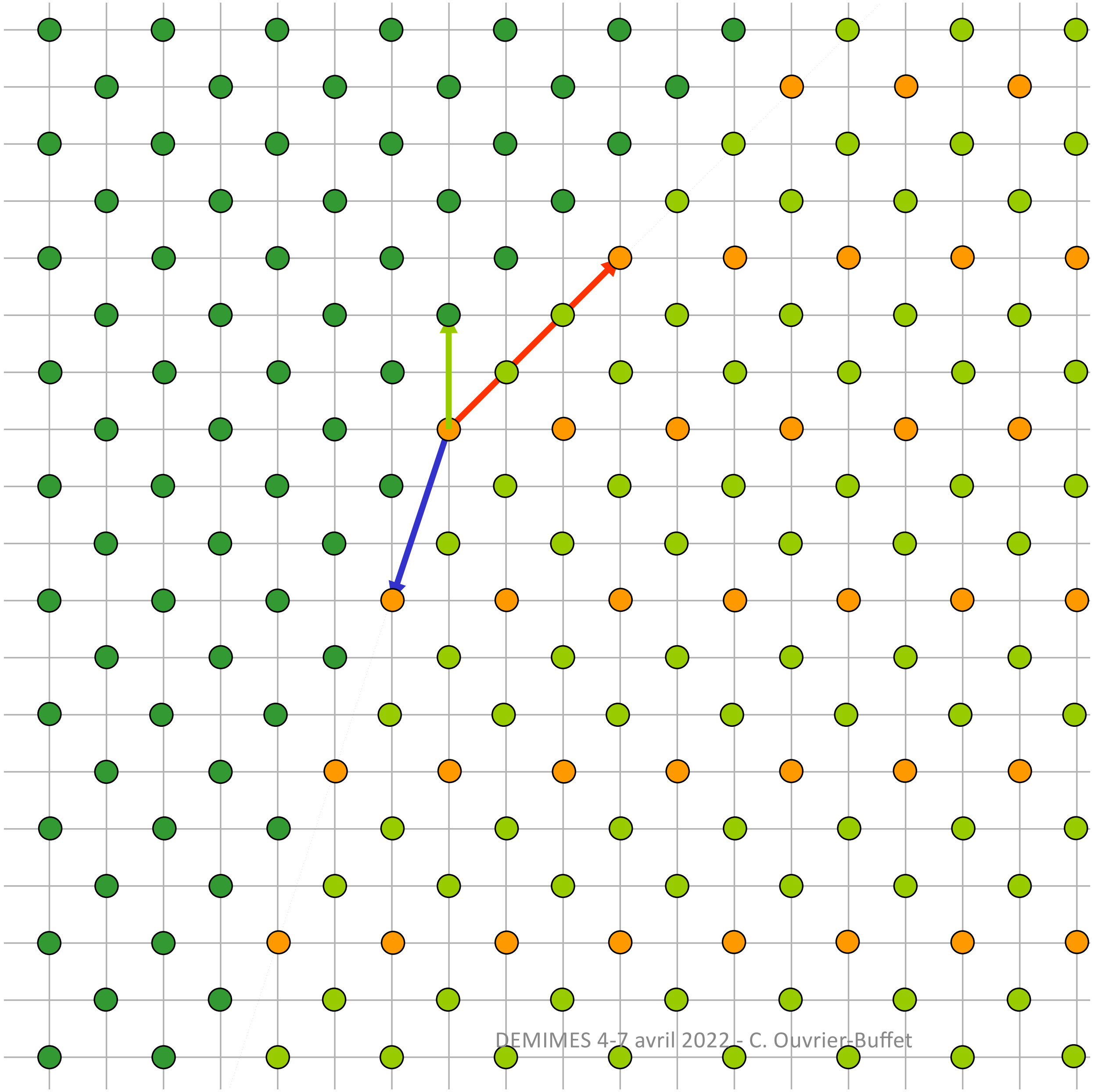
→ On peut se donner des problèmes particuliers pour étudier cela, mais il faut tout d'abord se mettre d'accord sur : la grille, la définition de déplacement





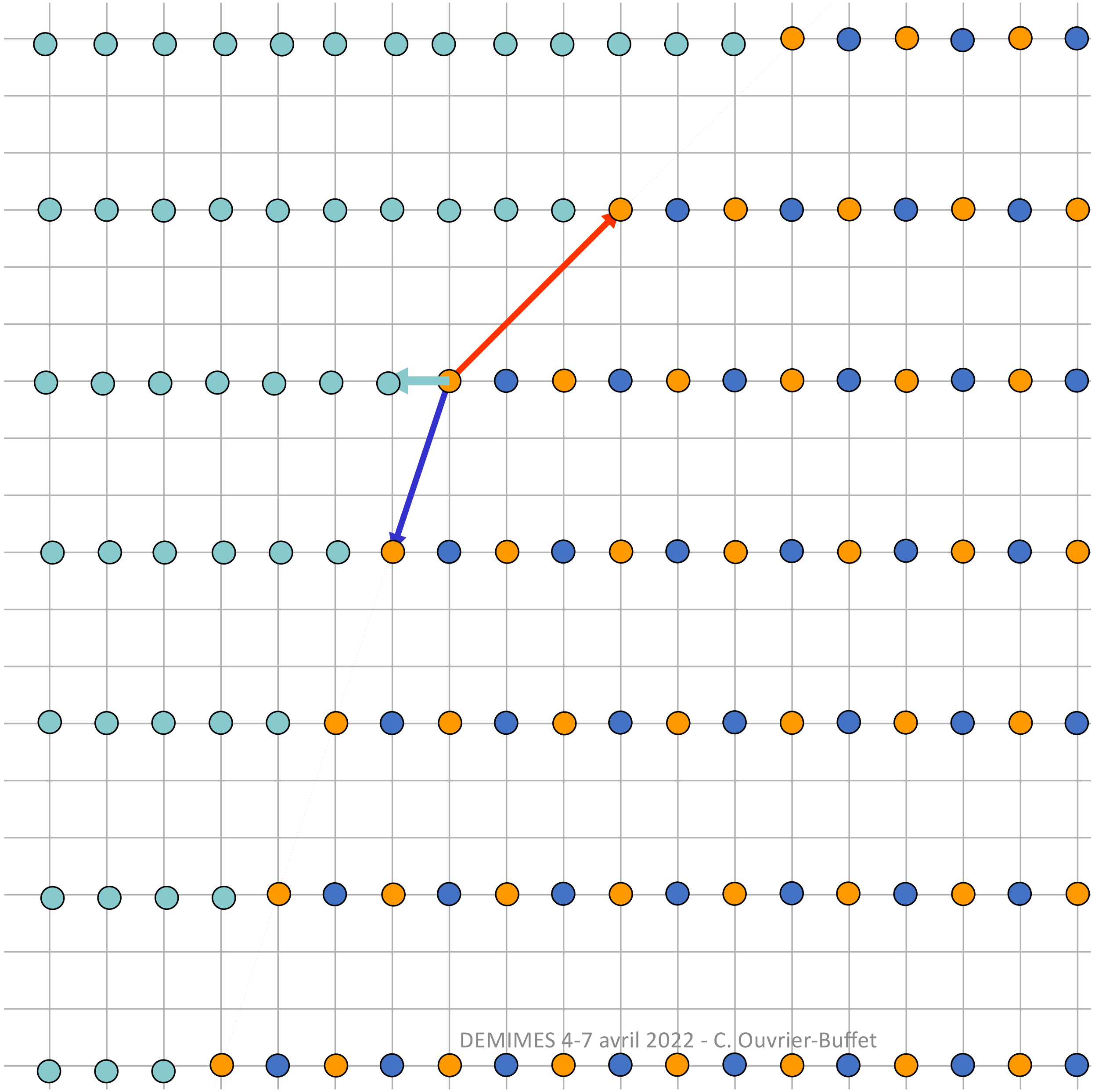
(2 ; 1)

Combinaison entière positive



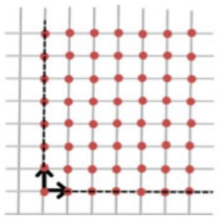
2
déplacements

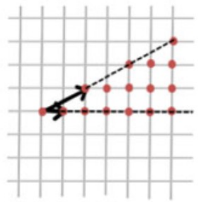
Et si on ajoute
un 3ème
déplacement ?



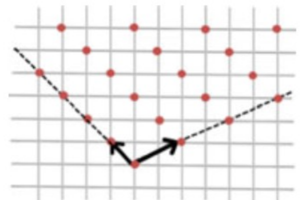
Frobenius en SiRC

- Un fait expérimental : point atteint ou non
- Deux propriétés en jeu
  - La densité

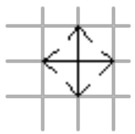


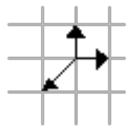


  - Un peu partout (couvrant) (u-p. partout)



- Déplacements pour atteindre tous les points de la grille, mais si l'on en supprime un ?





Frobenius en SiRC (rapide analyse *a priori*)

- A caractériser (faits, concepts) : la densité, u-p. partout, générateur, minimalité
- Problème réciproque et minimalité
  - L'ensemble des points atteints étant caractérisé, est-il possible de supprimer un déplacement sans le changer ?
  - On peut définir … : Ensemble de déplacements *minimal* si enlever un déplacement modifie l'ensemble des points atteints
  - … et reposer de nouvelles questions : Les ensembles minimaux et générateurs de déplacements sont-ils minimum ? (i.e. même cardinalité) → non !
- On retrouve le problème de Frobenius en dimension 1.
- On « remet en cause » des résultats de l'algèbre linéaire.
- On peut travailler la preuve, les contre-exemples, la construction de définitions.

Frobenius en SiRC (rapide analyse *a priori*)

- Des théorèmes
  - Théorème 1 (sur Z) : quel que soit k entier, il existe un ensemble minimal générateur de k déplacements.
  - Deux exemples sur Z
    - E = {1; -1}
      - Si on enlève 1, on perd la densité
    - F = {2 ; 3 ; -6}
      - Si on enlève 2 ou 3, on perd la densité
      - Si on enlève -6, on perd u-p. partout
  - Théorème 2 (sur Z^2): quel que soit k entier, il existe un ensemble minimal générateur de k déplacements.

- Comment les construire ?

Frobenius en SiRC (rapide analyse *a priori*)

- **Variables didactiques** : ancrage de la situation initiale, nombre de déplacements, grille, choix de valeurs (orienté vers certaines propriétés identifiables expérimentalement)
- **(dévolution)**
  - SiRC
- **(action)** Importance de l'étude de faits (expérimentaux)
- **(formulation)**
  - du problème / questionnements
  - de propriétés
  - d'énoncés mathématiques (à prouver)
- **(validation)**
  - expérimentale
  - théorique
- **(institutionnalisation)** (à discuter relativement à des connaissances/compétences antérieures)
  - Activité : exploration du problème ; conjecture, preuve
  - Enoncés mathématiques
  - Concepts : ensemble générateur, ensemble générateur minimal, « base », « dimension »

Dévolution de la situation

- **Pb 1**
  - Situation **différente** de l'algèbre (linéaire)
  - **Deux déplacements ne suffisent pas**
- **Pb 2**
  - Supprimer un déplacement sans changer l'aspect « génération » → preuve
  - Notion de **dépendance**, **redondance**
  - **Mais** on ne sait pas si tous les ensembles générateurs n'ont que 3 éléments
- **Pb 3**
  - 3 déplacements ne sont pas toujours suffisants
  - Les 4 déplacements du pb 3 : générateur et minimal
  - Théorème de la dimension faux dans le cas discret

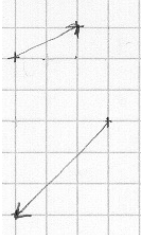
- Objets accessibles, travail sur les propriétés et les relations

Quelques résultats

- Début de 1ère année d'université, travail en groupes, les cours d'algèbre linéaire sont déjà passés
- 3 heures et une « narration » écrite
- Des étudiants :
  - dans le cadre de l'algèbre : générateurs, libres ou non, systèmes d'équations ;
  - mais aussi « en dehors » : ne questionnent pas le th. de la dimension, pas plus qu'un ensemble de *k* déplacements, générateur minimal, $k > 4$.
- Persistant : 2 déplacements pourraient suffire … horizontal / vertical

Frobenius en SiRC – productions des étudiants

- Différences avec l'algèbre linéaire (pas de vecteurs, CL à coefficients entiers) → le problème discret est un problème à part entière
  - 373 S (GR) : *Parce que justement ce n'est pas un espace vectoriel, je veux dire ça y ressemble, mais ce n'est pas un espace vectoriel. Déjà il n'y a pas d'élément nul, et en plus les lambdas dont on pourrait se servir, ils ne peuvent pas être négatifs. Comment dire, en fait, tu as seulement deux types de déplacement, mais tu ne peux pas faire, en fait, par exemple quand tu fais le (3 ; 3), comme ça tu ne peux pas faire le (3 ; 3) dans l'autre sens. Et pareil avec le (2 ; 1), tu peux pas faire le, le (-2 ; - 1).*



d_1

d_2.

Probleme 1

Gauthier - Acikaroğlu - GONCALVES SEYVOZ

A partir du pt A, on trace les pts en utilisant que les deplacements d_1. Puis on trace les points en utilisant que d_2 en repartant du pt A.

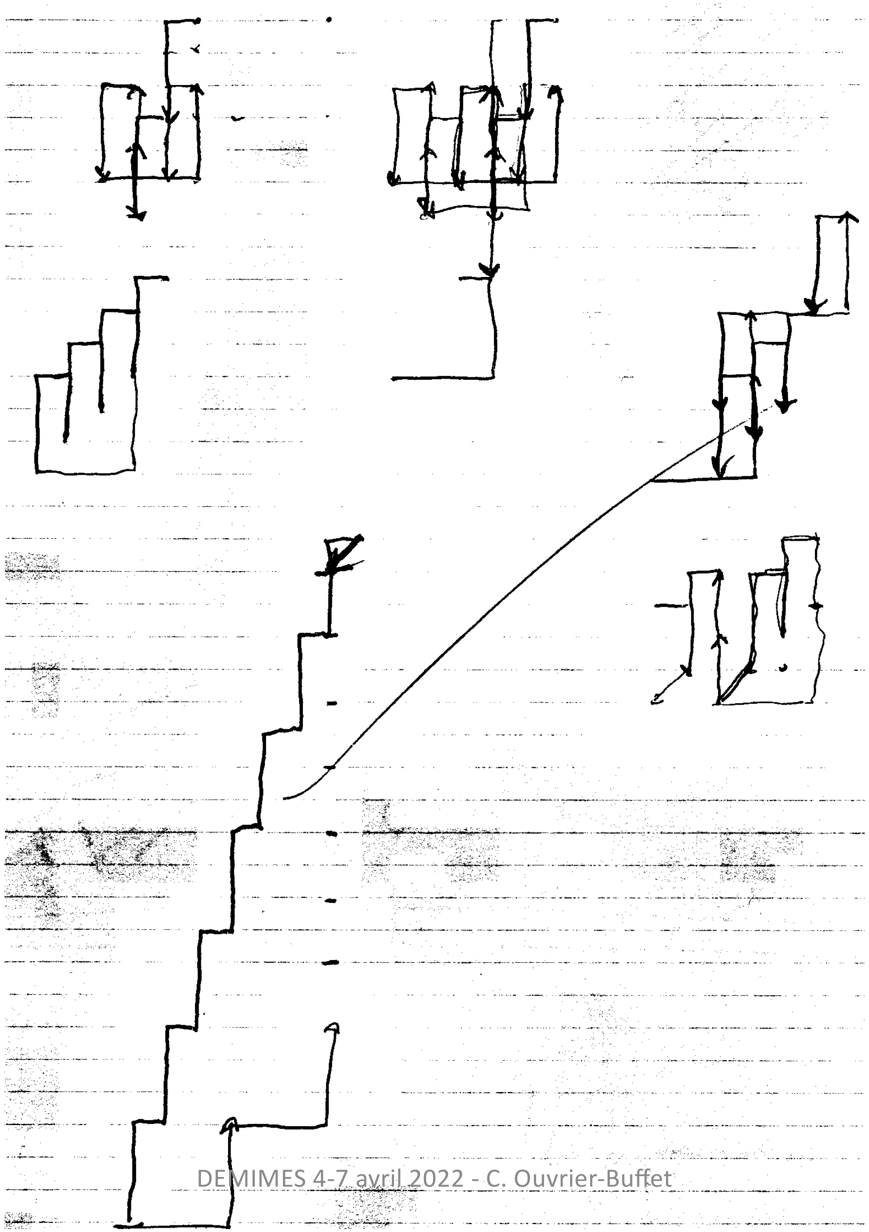
* Le secteur au dessus des 2 demi-droites ne sera jamais atteint. Les points atteints se situent sur les parallèles des demi-droites, qui sont écartées d'un espace constant.

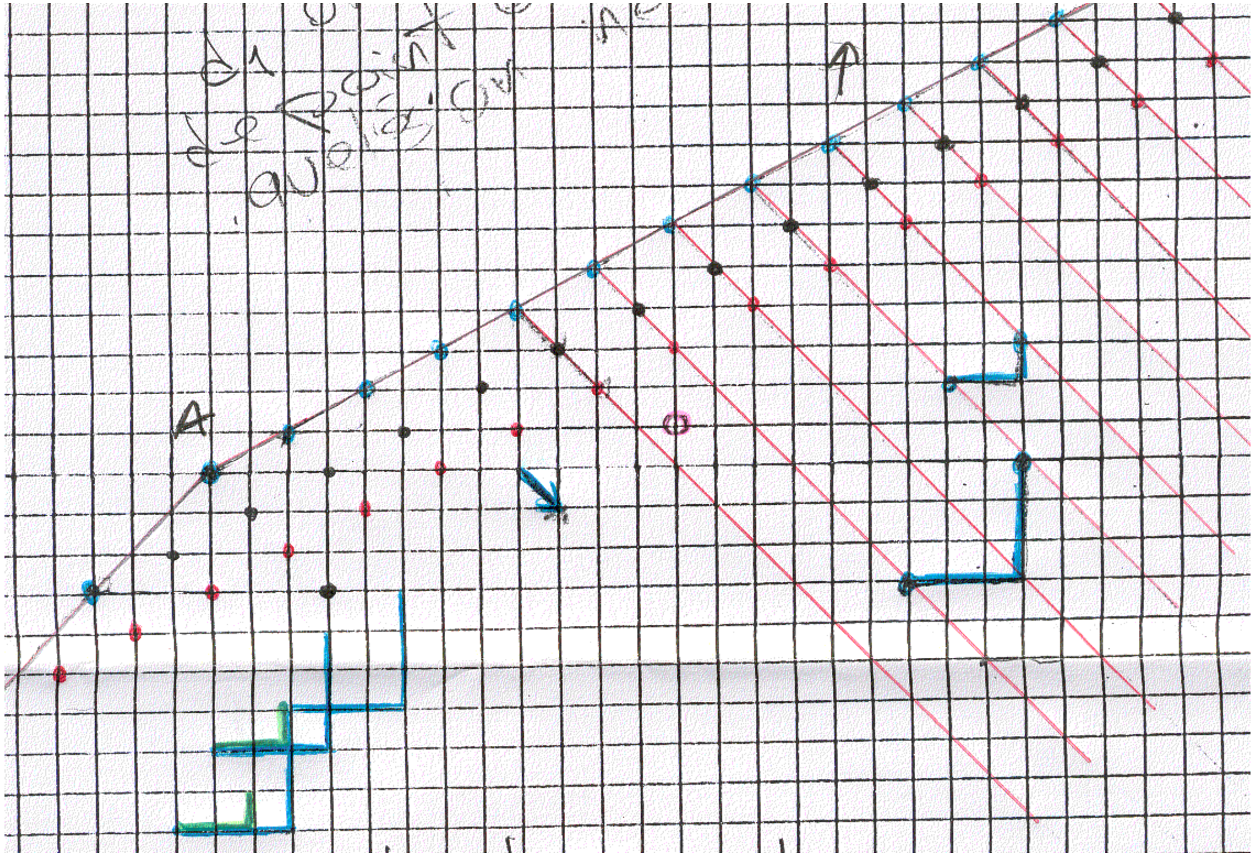
On peut faire une analogie avec les espaces vectoriels. Les points que l'on peut atteindre sont atteints par des combinaisons linéaires telles qu'avec $\vec{u}(2,1)$ et $\vec{v}(-3,-3)$ on a des combinaisons linéaires $\lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v}$, et l'on ne peut atteindre la zone "inatteignable" car $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{N}^*$. On constate aussi que l'ensemble des points trouvés n'est pas un espace vectoriel car il n'y a pas d'élément nul, puisque $\vec{u} \neq \vec{v} \neq \vec{0}$, et $\lambda_1 \neq 0$ et $\lambda_2 \neq 0$.

* Point B : on peut l'atteindre de n'importe quel point du losange appartenant aux intersections des parallèles.

On peut aussi atteindre le point B en partant du point A et faisant 6 d_1 et 3 d_2 dans n'importe quel ordre. Ce methode nous donne 18 differentes façons d'y arriver.

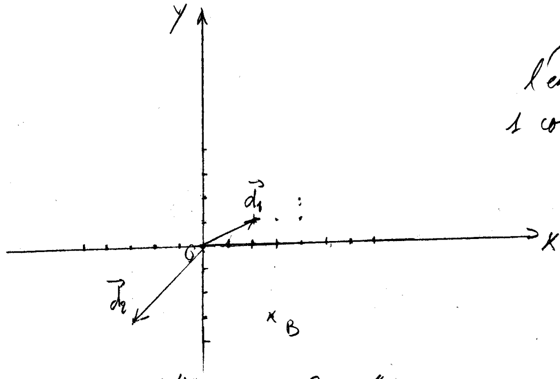
* Si on supprime le déplacement d_1 on se trouve sur la demi-droite [AC)
— — — — d_2 — — — — — — [AD)





1/2 Jeux - maths

$\vec{d_1}\left|\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right.$ $\vec{d_2}\left|\begin{matrix}3\\-3\end{matrix}\right.$



l'ens M des points atteint p.. 1 comb linéaire

$x\vec{d_1} + y\vec{d_2}$

$(S)\begin{cases} 2x - 3y = a \\ x - 3y = b \end{cases}$

B(3;-3) sol° de (S_1) ?

$(S)\begin{cases} 2x - 3y = 3 & (1) \\ x - 3y = -3 & (2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ -x + 3y = 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ x + 0 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x = 6} \\ y = \frac{3-12}{-3} \\ \boxed{y = 3} \end{cases}$

$6d_1 + 3d_2 = \begin{vmatrix} 6\times 2 + 3\times(-3) = 12 - 9 = 3 \\ 6\times 1 + 3\times(-3) = 6 - 9 = -3 \end{vmatrix}$

↳ 1 sol° qui marche

$(x, y, \in \mathbb{N} \quad a, b \in \mathbb{Z})$

$\begin{cases} 2x \pm 3y = 3 \\ \left[\begin{matrix} -2\cancel{x} + 6y = 6 \\ +(2\cancel{x} - 3y = -3) \\ 3y = 3 \end{matrix}\right] \end{cases}$

$S \begin{cases} y = 1 \\ 2x - 3 = 3 \\ x = 3 \end{cases}$

↳ 1 autre sol°

$3d_1 + d_2 = \begin{vmatrix} 3\times 2 - 3 = 3 \\ 3 - 3 = 0 \end{vmatrix}$

sol° qui ne marche

(en fait il y a une erreur de calcul sans doute

ou la methode est mauvaise

$$(2\lambda_1 - 5\lambda_2 + 5\lambda_3 + \lambda_4)\vec{i} + (3\lambda_1 - 2\lambda_2 - 3\lambda_3)\vec{j}$$

Si on supprime d_1 cela équivaut à $\lambda_1 = 0$

Alors
$$(-5\lambda_2 + 5\lambda_3 + \lambda_4)\vec{i} + (-2\lambda_2 - 3\lambda_3)\vec{j}$$

Dc d'après ↑ les

les pts sont en dessous de l'axe $x'Ox$

$$-(2\lambda_2 + 3\lambda_3)x + (5\lambda_2 - 5\lambda_3 - \lambda_4)y$$

$B(2,-2)$ $\quad -4\lambda_2 - 6\lambda_3 - 10\lambda_2 + 10\lambda_3 + 2\lambda_4 = -14\lambda_2 + 4\lambda_3 + 2\lambda_4 \Leftrightarrow -7\lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4 = 0$

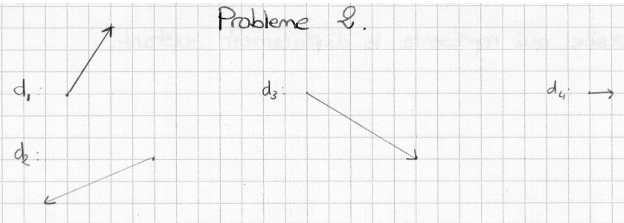
Si on supprime d_2 :
$$(2\lambda_1 + 5\lambda_3 + \lambda_4)\vec{i} + (3\lambda_1 - 3\lambda_3)\vec{j}$$

$$3(\lambda_1 - \lambda_3)x - (2\lambda_1 + 5\lambda_3 + \lambda_4)y$$

$B(2,-2)$
$$3(\lambda_1 - \lambda_3)\times 2 - (2\lambda_1 + 5\lambda_3 + \lambda_4)(-2)$$
$$= 6\lambda_1 - 6\lambda_3 + 4\lambda_1 + 10\lambda_3 + 2\lambda_4$$
$$= 10\lambda_1 + 4\lambda_3 + 2\lambda_4$$
$$\Leftrightarrow 5\lambda_1 + 2\lambda_3 + \lambda_4 = 0$$

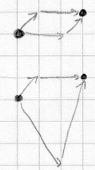
or y a oublié un terme

Probleme 2.



* En partant du point A, tous les points sont atteints.
* Le point B est donc atteint.

Deux chemins sont "différents" si en partant d'un même point on utilise des déplacements différents pour atteindre un même point.



⇒ deux chemins identiques

⇒ deux chemins différents.

* Suppression de deplacements.

d_1 : le secteur atteint est en bas, et delimité par les demi droites [AC), [AD).

d_2 : le secteur atteint est à droite, et delimité par les demi droites. [AF) et [AE).

d_4 : En supprimant d4, on n'elimine pas un secteur en particulier ; à l'aide des autres deplacements on peut atteindre des pts qui sont à ≠ endroits de la feuille.

d_3 : Tous les points sont atteints qd même. Le deplacement d_3 est inutile.

Si on supprime d_1 et d_2, les points atteints seront situés dans le secteur délimité par les ½ droites [AC) et [AE).

d_1 et d_3 : secteur délimité par [AC) et [AD)

d_1 et d_4 : secteur délimité par [AD) et [AE)

d_2 et d_3 : secteur délimité par [AC) et [AF)

d_2 et d_4 : secteur délimité par [AE] et [AF)

d_3 et d_4 : secteur délimité par [AD) et [AF)

→

u-p. partout mais pas la densité

Frobenius en SiRC – productions des étudiants

- Différences avec l'algèbre linéaire (pas de vecteurs, CL à coefficients entiers) → le problème discret est un problème à part entière
- Difficulté à identifier la propriété « densité », prédominance de la propriété « u-p. partout »
- Importation de vocabulaire issu de l'algèbre linéaire : « ensemble générateur » (mais difficile connexion aux propriétés)
- Des définitions-en-acte et propriétés-en-acte qui montrent :
  - Focus sur « les » 4 déplacements élémentaires
  - Se ramener à ces déplacements (CL des déplacements donnés)
  - Non-minimal : quand un déplacement est CL d'autres

Frobenius en SiRC – productions des étudiants

- Des définitions-en-acte et propriétés-en-acte
  - Importance des 4 déplacements élémentaires : objectif = générer les 4 points cardinaux

178 B : Pour pouvoir aller partout, il faudrait qu'on ait une combinaison ... Pour savoir si on peut aller sur chaque point de la grille exactement, on prend ça, avec les coordonnées multipliées par a, b, c ou d (c'est nos alpha, bêta, gamma ...). Tu essaies, si tu trouves (1 ; 1), ça veut dire que tu peux aller là. Ensuite, tu fais ce système avec (1 ;1) pour voir si tu as des solutions. Tu fais le système avec (1 ; - 1) pour voir si tu peux aller là, et avec (-1 ;1) et avec (-1 ;-1).

179 A : Oui, pour voir si tu peux atteindre les quatre points qu'il y a autour !
180 B : Ça veut alors dire que tu peux aller partout. Si on peut prouver ça, on aura plus de questions à se poser. Et si on peut pas le prouver ... ça veut dire qu'il y a des conditions, et vu que c'est compliqué, soit il y a une technique ...
181 A : C'est pas ces quatre-là. Il faut prendre ceux-là.
182 B : Ah oui! Il faut prendre(1;0) (-1;0) (0;1) et (0;-1). Ça nous fait quand même quatre systèmes d'équations à résoudre ! Mais il y a plein de solutions avec ça ! Mais prouver qu'il y en a une, ça suffit. Et il faudra qu'elle marche pour l'autre aussi. (Ils font les calculs, cherchent les coefficients par essais-erreurs).

Des propriétés opératoires

- Une définition naturelle de « générateur »
  - « atteindre tous les points de la grille »
  - transformée en une propriété opératoire : « générer 4 points ou déplacements »
  - avoir toutes les directions représentées (droite, gauche, haut, bas) est une condition nécessaire.

Des propriétés opératoires

- Groupe D :   « Mais après, peut-être que … on peut pas supprimer d1, parce que c'est le seul qui nous fait monter. On peut pas supprimer d2, c'est le seul qui nous fait aller à gauche. »
- Groupe P : « Si on supprime d1 il y a déjà toute la partie du haut qui se supprime. C'est bien ça ? (…) Pareil si on supprime d2 on va rester dans cette zone. Ca, ça se supprime. On n'atteint jamais cette zone. »
- Attention portée sur :
  - « 4 points cardinaux » et la propriété u-p. partout
  - **mais** pas sur la propriété « densité ».

Des définitions-en-acte

- Définitions-en-acte de « générateur minimal » et « d'ensemble minimal »
  - Générateur minimal : lorsque tous les déplacements sont utilisés dans la recherche de quatre déplacements unitaires.
  - Et un ensemble de déplacements n'est pas minimal lorsqu'un déplacement est combinaison entière des autres.
- Opératoires … mais ne prennent pas le statut de définitions chez les étudiants.

Des éléments de conclusions

- Les définitions-en-acte montrent que les étudiants se détachent difficilement de l'action
- Ils se limitent aux cas proposés
- Pas de généralisation (et donc pas d'évolution des définitions-en-acte)
- La distance (entre manipulation et formalisation) est trop rarement travaillée dans l'enseignement

Frobenius en SiRC – conclusions ?

- Spécifités du discret mais prégnance du modèle « algèbre linéaire » (parfois mal maîtrisé en tant que tel)
  - Une décontextualisation
  - Une mise en place d'une problématique hors de l'algèbre linéaire notionnel
    - Théorie locale ?
  - Une épistémologie des concepts de « génération », « indépendance » et « minimalité »
  - Plus difficile, mais plus abordable et plus riche. Des obstacles / difficultés identifiables.
- Difficultés dans les situations de formulation et de validation :
  - une articulation définition-preuve à construire
  - une formulation des énoncés mathématiques à solliciter davantage (action)
  - pour fonder un travail sur la preuve plus poussé.
- Revoir les choix de variables didactiques et le projet d'enseignement
- Transposition de l'activité mathématique à la classe et à la formation des enseignants ?

Merci de votre attention !